

בני גורן

המעגל – הנדסת המישור

קובץ תיאוריה, דוגמאות ותרגילים עם מעגל לתלמידי 5 יח"ל

קובץ זה מיועד לבתי ספר שמלמדים בכיתה י' מהספר מתמטיקה (4 ו-5 יח"ל) חלק א' שאלונים 804 ו-806 (כתום – אדום) ורוצים ללמד את כל החומר של המעגל בכיתה י'.

קובץ זה נגיש לכל התלמידים בחינם וניתן גם להדפיס אותו.

הערה: כל החומר שמופיע בקובץ זה נלקח מהספר מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'-1 שאלון 806 (581) (אדום – ירוק) ורצוי ללמד אותו בכיתה י"א.

התרגילים מופיעים בהמשך לעמוד זה.

פרק שביעי

הנדסת המישור – הגדרת המעגל, מיתרים וקשתות

הגדרת המעגל

הסבר כללי על המעגל

פרק זה הוא הראשון מבין הפרקים שבהם נעסוק במעגל. לפני שלומדים את החומר שבחמשת הפרקים הראשונים על המעגל (הכוונה לפרקים השביעי עד האחד עשר) צריך ללמוד על משולשים ומרובעים. נושאים אלה מופיעים בספרים הנדסה חלק א', הנדסה חלק ב' ומתמטיקה (4 ו-5 יחידות לימוד) חלק א' שאלונים 035804 ו-035806. בחמשת הפרקים הנ"ל אין שימוש בנושאים אחרים שמופיעים בפרקים החל מהפרק השנים עשר.

לפני שלומדים את החומר שבפרק השנים עשר צריך ללמוד על שטחים ומשפט פיתגורס.

לפני שלומדים את החומר שבפרק הארבעה עשר צריך ללמוד על פרופורציה, תכונת חוצה הזווית במשולש ודמיון משולשים.

הערה: עפ"י הנחיות הפיקוח על המתמטיקה מותר לפתור בעיות בגיאומטריה של המישור גם בעזרת טריגונומטריה.

מקום גיאומטרי

לפני שנגדיר מהו מעגל נזכיר את המושג מקום גיאומטרי.

הגדרה:

אוסף של נקודות בעלות תכונה מסויימת נקרא מקום גיאומטרי.

הגדרת המעגל

נגדיר עכשיו מהו מעגל.

הגדרה:

המעגל – המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה נקרא מעגל.



הנקודה הקבועה נקראת **מרכז המעגל**.

המרחק הקבוע שווה ל**רדיוס המעגל**.

מקובל לסמן את הרדיוס באות R .

נביא הגדרות נוספות הקשורות למעגל.

הגדרות:



רדיוס – קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שעל המעגל נקרא רדיוס או מחוג.

מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל נקרא מיתר.

קוטר – מיתר העובר דרך מרכז המעגל נקרא קוטר.

הקוטר שווה לפעמיים הרדיוס ולכן כל הקטרים שווים זה לזה וחוצים זה את זה.

קשת – חלק מהמעגל שבין שתי נקודות שעליו נקרא קשת.

היקף המעגל – זהו אורך כל המעגל. (ראה עמ' 385).

האורך של קשת – זהו האורך של חלק המעגל שבין שתי נקודות הקצה של הקשת.

הערות:

(א) כל מעגל מחלק את המישור לשלושה חלקים:

(1) **הנקודות שבתוך המעגל** – אלה כל הנקודות שמרחקן

מהמרכז קטן מהרדיוס. (בציור הנקודה A , כי $OA < R$).

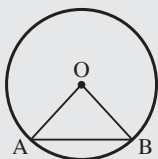
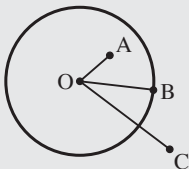
(2) **הנקודות שעל המעגל** – אלה כל הנקודות שמרחקן

מהמרכז שווה לרדיוס. (בציור הנקודה B , כי $OB = R$).

(3) **הנקודות שמחוץ המעגל** – אלה כל הנקודות שמרחקן

מהמרכז גדול מהרדיוס. (בציור הנקודה C , כי $OC > R$).

O – מרכז המעגל



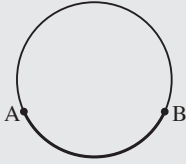
(ב) חשוב לשים לב שבגלל השוויון של כל הרדיוסים

אז כל משולש שקודקוד אחד שלו במרכז המעגל ושני

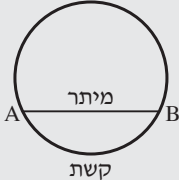
הקודקודים האחרים שלו הם על המעגל הוא משולש

שווה שוקיים: $AO = BO$.

ג) כל שתי נקודות על המעגל קובעות למעשה שתי קשתות. אם שתי הקשתות אינן שוות זו לזו (ראה עמ' 268) אז אחת מהן היא הקשת הקטנה והשנייה היא הקשת הגדולה. אם לא נציין אחרת נתכוון בדרך כלל לקשת הקטנה. בציוור הקשת AB היא הקשת המודגשת. הסימון המקובל הוא: $\widehat{AB}$.



ד) לכל מיתר מתאימה קשת שקצותיה הן נקודות הקצה שלו. גם ההיפך נכון: לכל קשת מתאים מיתר. לדוגמא – בציוור מסומן המיתר AB . הקשת שבציוור שמתאימה למיתר היא $\widehat{AB}$.



ה) בהמשך להערה ג' נציין שאם המיתר איננו קוטר במעגל אז הקשת המתאימה לו היא הקשת הקטנה. אם המיתר הוא קוטר אז הוא מחלק את המעגל לשתי קשתות שוות שכל אחת מהן היא מחצית המעגל. הקוטר עם קשת כנ"ל נקראים חצי מעגל.



נביא עכשיו שני משפטים ללא הוכחה מדויקת המאפיינים את המעגל.

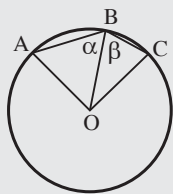
משפט:

דרך שלוש נקודות שאינן נמצאות על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.

ההסבר – שלוש נקודות שאינן על ישר אחד יוצרות משולש. כפי שכבר למדנו (ראה בספר הנדסה חלק א' עמ' 368) שלושת האנכים האמצעיים לצלעות המשולש נפגשים בנקודה אחת ויחידה. נקודה זאת נמצאת במרחקים שווים מקודקודי המשולש והיא מרכז המעגל העובר דרך שלוש הנקודות. (המרחקים שווים לרדיוס). על המשולש אומרים שהוא חסום במעגל.

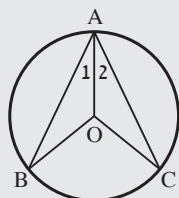
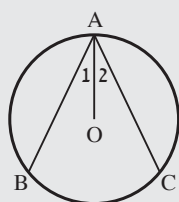
משפט:

כל שלוש נקודות שנמצאות על המעגל אינן נמצאות על ישר אחד.



ההסבר – נניח ש-A, B ו-C הן שלוש נקודות על מעגל שמרכזו O. הזוויות שמסומנות ב- α ו- β הן זוויות חדות כי הן זוויות בסיס של משולשים שווי שוקיים: $OA = OB = R$ וכן $OB = OC = R$. לכן הסכום $\alpha + \beta$ קטן מזווית שטוחה (180°). כלומר הנקודות A, B ו-C לא נמצאות על ישר אחד.

נוכל לסכם: המעגל הוא קו עקום. כלומר אף חלק ממנו אינו קטע.



דוגמא:

AB ו-AC הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O.

נתון: $AB = AC$.

הוכח: $\angle A_1 = \angle A_2$.

פתרון:

בהרבה מקרים שבהם צריך לפתור בעיות הקשורות למעגל כדאי להעביר רדיוסים שיחברו נקודות שעל המעגל עם מרכזו. במקרה זה נעביר רדיוסים שיחברו את הנקודות B ו-C עם המרכז O ונזכור ש-BO ו-CO שווים זה לזה כי שניהם רדיוסים במעגל.

נעבור להוכחה:

נחפוף את המשולשים AOB ו-AOC.

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(נתון)} & AB = AC \\ \text{(צלע משותפת)} & AO = AO \\ \text{(רדיוסים במעגל)} & BO = CO \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

$$\text{(עפ"י צ.צ.צ.)} \quad \triangle AOB \cong \triangle AOC$$

$\Downarrow$

$$\angle A_1 = \angle A_2 \quad \text{(זוויות מתאימות במשולשים חופפים)}$$

מש"ל.

מצולע חסום במעגל

לפני שנסיים סעיף זה נגדיר (ראה פרק אחד עשר):

מצולע שכל קודקודיו על מעגל נקרא מצולע חסום במעגל.

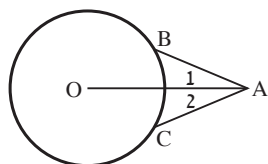
כפי שראינו במשפט שלפני האחרון כל משולש אפשרי לחסום במעגל. לא כך הדבר לגבי מרובע או מצולע אחר. (ראה עמ' 349 ו-360).

הערה לגבי התרגילים:

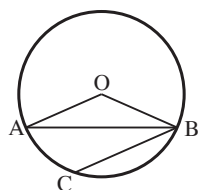
בדרך כלל, בכל סעיף, התרגילים מחולקים לתרגילים יסודיים ולתרגילים נוספים. התרגילים שמופיעים תחת הכותרת תרגילים יסודיים הם בדרך כלל די קלים. התרגילים שמופיעים תחת הכותרת תרגילים נוספים הם קצת יותר קשים. יחד עם זאת חשוב לשים לב שרק התרגילים האחרונים (מבין התרגילים הנוספים) שמופיעים בסופו של כל סעיף או תת סעיף הם תרגילים קשים. בסעיפים שבהם יש תרגילי חזרה מצויין (בדרך כלל) לפני התרגילים הקשים שהם קשים מהרגיל.

תרגילים (הגדרת המעגל)

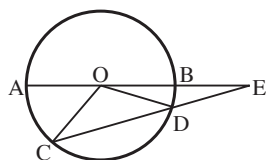
תרגילים יסודיים – הגדרת המעגל



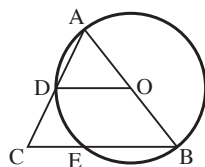
- (1) הנקודות B ו-C נמצאות על מעגל שמרכזו O. הנקודה A נמצאת מחוץ למעגל. נתון: $AB = AC$.
א. הוכח: $\angle A_1 = \angle A_2$.
(ראה את סימון הזוויות בציור).
ב. הוכח: $BC \perp AO$.



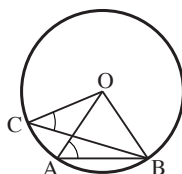
- (2) AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.
א. הוכח: אם AB חוצה את הזווית OBC אז $BC \parallel AO$.
ב. נסח והוכח את הטענה ההפוכה לזו שמופיעה בסעיף א'.



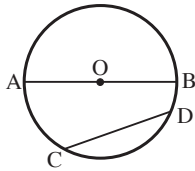
- (3) במעגל שמרכזו O AB הוא קוטר ו-CD הוא מיתר שהמשכיהם נחתכים בנקודה E. נתון שהקטע DE שווה לרדיוס המעגל.
א. נתון: $\angle BOD = 18^\circ$. חשב את הזווית AOC.
ב. (ללא קשר לנתון של סעיף א') הוכח: $\angle AOC = 3\angle BOD$.



- (4) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. המיתר BE מקביל לרדיוס DO. המשך המיתר AD נפגש עם המשך המיתר BE בנקודה C.
א. הוכח: $AD = CD$.
ב. הוכח: $AB = CB$.

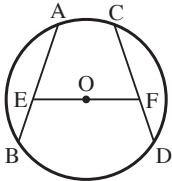


- (5) AB ו-BC הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O כך שהנקודה A נמצאת על הקשת הקטנה BC.
א. הוכח: $\angle OAB > \angle OCB$.
ב. הוכח: $BC > AB$.

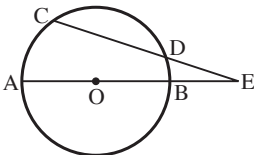


- 6) הוכח: כל קוטר במעגל גדול מכל מיתר
אחר שאיננו קוטר.
(הדרכה: צ"ל: $AB > CD$).

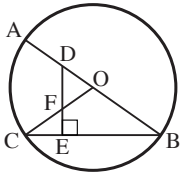
תרגילים נוספים – הגדרת המעגל



- 7) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O.
הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על המיתרים
AB ו-CD כך שהקטע EF עובר דרך המרכז O
ומתקיים: $EO = FO$, $BE = DF$.
הוכח: $AB = CD$.



- 8) במעגל שמרכזו O נתון: AB הוא
קוטר ו-CD הוא מיתר שהמשכיהם
נחתכים בנקודה E.
א. הוכח: $CE < AE$.
ב. הוכח: $BE < DE$.



- 9) AB הוא קוטר ו-BC הוא מיתר במעגל
שמרכזו O. DE הוא אנך למיתר BC
והוא חותך את CO בנקודה F כמתואר
בציור. הוכח:
א. המשולש DOF הוא שווה שוקיים.
ב. $AD = CF$.

- 10) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. C היא נקודה על הקוטר הנמצאת בין A ל-O.
הוכח: מבין כל הנקודות שעל המעגל הנקודה הקרובה ביותר לנקודה C היא הנקודה A
והנקודה הרחוקה ביותר מהנקודה C היא הנקודה B.

תשובות (הגדרת המעגל):

3) א. 54° .

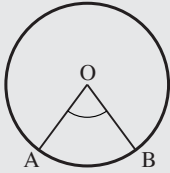
זווית מרכזית, מיתרים וקשתות

הגדרת הזווית המרכזית

נגדיר עכשיו סוג של זווית במעגל.

הגדרה:

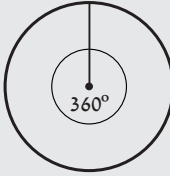
זווית מרכזית – זווית שהקודקוד שלה הוא במרכז המעגל נקראת זווית מרכזית.



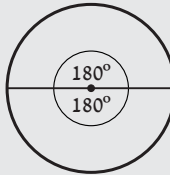
לדוגמא: הזווית AOB היא זווית מרכזית במעגל שמרכזו O.

הערות:

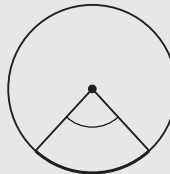
(א) זווית מרכזית ששוקיה מתלכדות זו עם זו (והמשכי השוקיים שלה נמצאים בתוך הזווית) היא זווית בת 360° . כלומר: **המעגל מחולק ל- 360°** .



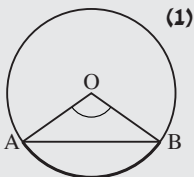
(ב) כל קוטר יוצר שתי זוויות מרכזיות שוות שכל אחת מהן היא **זווית שטוחה**, כלומר בת 180° .



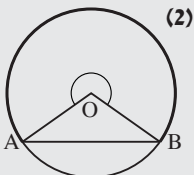
(ג) שני רדיוסים היוצאים ממרכז המעגל **שלא נמצאים על אותו קוטר** יוצרים למעשה **שתי זוויות מרכזיות**: אחת הקטנה מ- 180° ואחת הגדולה מ- 180° . אם לא נציין אחרת הכוונה במושג "זווית מרכזית" היא לזווית הקטנה מ- 180° .



(ד) לכל זווית מרכזית **מתאימים** קשת ומיתר ולהיפך. במקרה כזה אומרים שהזווית **נשענת** על הקשת ועל המיתר.

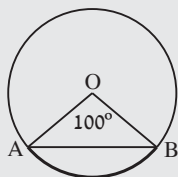


לדוגמא: הזווית AOB נשענת על הקשת AB (הקטנה) ועל המיתר AB (ציור (1) משמאל).



כאשר הזווית המרכזית AOB היא הזווית הגדולה אז היא נשענת על הקשת AB הגדולה (ציור (2) משמאל).

(ה) מקובל גם לדבר על "קשת בת מספר מסויים של מעלות" והכוונה היא שהזווית המרכזית הנשענת על הקשת היא בת אותו מספר מעלות.



לדוגמא: הקשת AB שבציור היא בת 100° כי הזווית המרכזית הנשענת עליה היא בת 100° .

שים לב: אפשר לרשום $\widehat{AB} = 100^\circ$, מצד שני אפשר לרשום גם $\widehat{AB} = 5$ ס"מ וכאן הכוונה שאורך הקשת הוא 5 ס"מ.

דוגמא א':

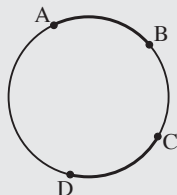
מה גודל הקשת שמהווה $\frac{5}{12}$ מהיקף המעגל?

פתרון:

נכפול את החלק שמהווה הקשת ב- 360° ונקבל $\frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$ כלומר הקשת היא בת 150° .

שוויון קשתות, חיבור וחסור קשתות

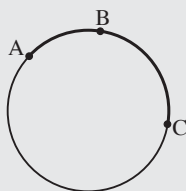
בדומה לשוויון זוויות ניתן לדבר על שוויון קשתות.



קשתות שוות – שתי קשתות שאם נשים אותן זו על גבי זו הן תתלכדנה.

לדוגמא: בציור מתקיים $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

בדומה לחיבור וחסור זוויות ניתן לדבר על חיבור וחסור קשתות.



סכום קשתות – לדוגמא בציור מתקיים:

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{AC}$$

הפרשי קשתות – אפשר גם לרשום:

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} - \widehat{BC} \quad \text{וכן} \quad \widehat{BC} = \widehat{AC} - \widehat{AB}$$

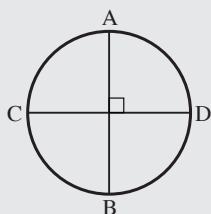
כמו בחיבור וחסור זוויות ניתן לדבר גם על חיבור וחסור של קשתות שאינן סמוכות זו לזו.

הערות:

(א) בהמשך להערה ב' שבצד א' הקודם אפשר להגיד שכל קוטר מחלק את המעגל לשתי קשתות שוות.

גם הכיוון ההפוך נכון:

אם מיתר במעגל מחלק את המעגל לשתי קשתות שוות אז הוא קוטר.



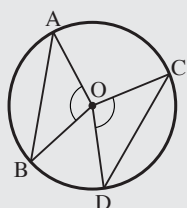
ב) שני קטרים המאונכים זה לזה מחלקים את המעגל ל-4 קשתות שוות. כל קשת שייכת לזווית מרכזית בת 90° . כל חלק הוא רבע מעגל.

זוויות מרכזיות ומיתרים

נלמד עכשיו על הקשר שבין מיתרים לזוויות הנשענות עליהם.

משפט:

על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:
AB ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O.

נתון: $AB = CD$

צ"ל: $\angle AOB = \angle COD$

הוכחה:

נחפוף את המשולשים AOB ו-COD.

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(נתון)} & AB = CD \\ \text{(רדיוסים)} & AO = CO \\ \text{(רדיוסים)} & BO = DO \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

$$\text{(עפ"י צ.צ.צ.)} \quad \triangle AOB \cong \triangle COD$$

$\Downarrow$

$$\text{(זוויות מתאימות במשולשים חופפים)} \quad \angle AOB = \angle COD$$

מש"ל.

ננסח את המשפט ההפוך.

משפט:

זוויות מרכזיות שוות נשענות על מיתרים שווים.

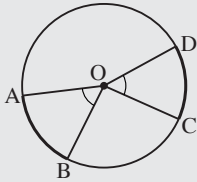
הערה: להוכחת המשפט ראה תרגיל 3 בעמ' 271.

זוויות מרכזיות וקשתות, קשתות ומיתרים

נביא עכשיו שני משפטים המתייחסים לקשר שבין זוויות מרכזיות לקשתות ובין קשתות למיתרים. לא נוכל להביא כאן את ההוכחות.

משפט:

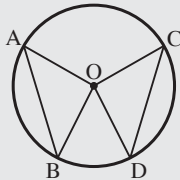
זוויות מרכזיות שוות נשענות על קשתות שוות ולהיפך.



לדוגמא: אם $\angle AOB = \angle COD$ אז $\widehat{AB} = \widehat{CD}$
 ולהיפך: אם $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ אז $\angle AOB = \angle COD$

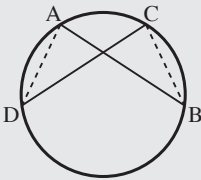
משפט:

למיתרים שווים מתאימות קשתות שוות ולהיפך.



לדוגמא: אם $AB = CD$ אז $\widehat{AB} = \widehat{CD}$
 ולהיפך: אם $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ אז $AB = CD$

בדוגמא הבאה נראה שימוש בקשר שבין קשתות ומיתרים בעלי אותה זווית מרכזית.



דוגמא ב':

AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל.

נתון: $AB = CD$

הוכח: $CB = AD$

פתרון:

הוכחה:

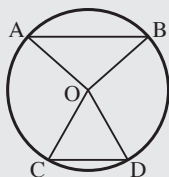
$$\begin{array}{lcl}
 \left. \begin{array}{l} \text{(למיתרים שווים } (AB = CD) \text{ מתאימות קשתות שוות)} \\ \text{(כל קשת שווה לעצמה)} \end{array} \right\} & \begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{CD} \\ \widehat{AC} = \widehat{AC} \end{array} & \\
 & \Downarrow & \\
 \text{(חיסור קשתות שוות מקשתות שוות)} & \widehat{AB} - \widehat{AC} = \widehat{CD} - \widehat{AC} & \\
 & \Downarrow & \\
 & \widehat{CB} = \widehat{AD} & \\
 & \Downarrow & \\
 \text{(לקשתות שוות מתאימים מיתרים שווים)} & CB = AD & \\
 & \text{מש"ל.} &
 \end{array}$$

אי שוויונות בין זוויות מרכזיות, מיתרים וקשתות

המשפטים הבאים דומים למשפטים הקודמים והם מתייחסים לאי שוויונות.

משפט:

אם במעגל זווית מרכזית אחת יותר גדולה מזווית מרכזית שנייה אז המיתר המתאים לזווית הגדולה יותר גדול מהמיתר המתאים לזווית הקטנה ולהיפך.



לדוגמא: אם $\angle AOB > \angle COD$ אז $AB > CD$,
ולהיפך: אם $AB > CD$ אז $\angle AOB > \angle COD$.

משפט:

אם במעגל זווית מרכזית אחת יותר גדולה מזווית מרכזית שנייה אז הקשת המתאימה לזווית הגדולה יותר גדולה מהקשת המתאימה לזווית הקטנה ולהיפך.

לדוגמא: (ראה ציור למשפט הקודם) $\angle AOB > \angle COD \Leftrightarrow \widehat{AB} > \widehat{CD}$

משפט:

אם במעגל קשת אחת יותר גדולה מקשת שנייה אז המיתר המתאים לקשת הגדולה יותר גדול מהמיתר המתאים לקשת הקטנה ולהיפך.

לדוגמא: (ראה ציור למשפט שלפני הקודם) $AB > CD \Leftrightarrow \widehat{AB} > \widehat{CD}$

תרגילים

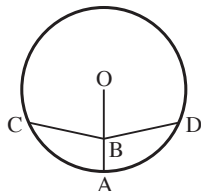
(זווית מרכזית, מיתרים וקשתות)

תרגילים יסודיים – זווית מרכזית, מיתרים וקשתות

(1) מצא את גודלה של קשת במעלות אם החלק שהיא מהווה מהיקף המעגל הוא $\frac{4}{15}$.

(2) מצא איזה חלק מהיקף המעגל מהווה קשת שגודלה במעלות הוא 140° .

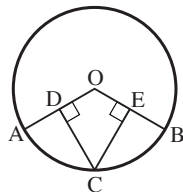
(3) הוכח את המשפט (ראה עמ' 269): זווית מרכזיות שוות נשענות על מיתרים שווים.



(4) AO הוא רדיוס במעגל שמרכזו O. הנקודה B היא על AO והנקודות C ו-D הן על המעגל.

נתון: $CB = DB$

הוכח: $\widehat{AC} = \widehat{AD}$



(5) AO ו-BO הם רדיוסים במעגל שמרכזו O.

מהנקודה C שהיא אמצע הקשת AB הורידו

אנכים CD ו-CE לרדיוסים.

א. הוכח: $CD = CE$

ב. נתון: $AD = DO$. חשב את הזווית AOB.

נמק את תשובתך.

תרגילים נוספים – זווית מרכזית, מיתרים וקשתות

6) AB הוא הקוטר של חצי מעגל שמרכזו O.

הנקודות D ו-C נמצאות על קשת חצי

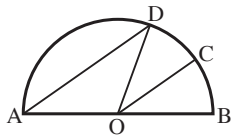
המעגל. נתון: $AD \parallel CO$.

א. הוכח: $\widehat{DC} = \widehat{CB}$.

ב. נסמן ב-E את אמצע BO וב-F את

נקודת החיתוך של CO עם BD.

הוכח: $OE = EF$.



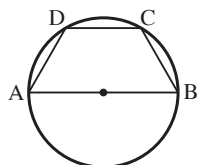
7) AB הוא קוטר במעגל. הנקודות C ו-D נמצאות

על המעגל. נתון: $AD = DC = CB$.

א. חשב את זווית המרובע והוכח שהוא טרפז.

ב. נתון שהיקף הטרפז הנ"ל הוא 40 ס"מ.

חשב את קוטר המעגל.



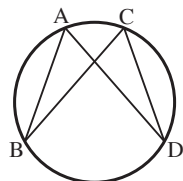
8) AB ו-CD הם מיתרים במעגל השווים

זה לזה.

א. הוכח: $AD = CB$.

ב. נתון: $\widehat{AD} = 120^\circ$, $\widehat{BD} = 155^\circ$.

חשב את הקשת $\widehat{CD}$ ואת הקשת $\widehat{AC}$.

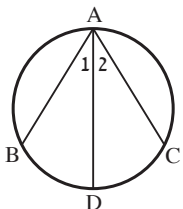


9) AB, AC ו-AD הם מיתרים

במעגל. נתון: $\angle A_1 = \angle A_2$,

$AB = AC$.

הוכח: AD הוא קוטר במעגל.



10) A, B ו-C הן נקודות על מעגל שמרכזו O.

נתון: $\angle C = \alpha$, $AB = BC$.

א. הבע באמצעות α את הזווית המרכזית

AOC המסומנת בקשת.

ב. היעזר בתוצאה של סעיף א' ומצא את

התחום בו יכולה להיות הזווית α .

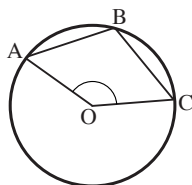
ג. היעזר בתוצאה של סעיף א' ומצא את α אם נתון שהרדיוסים AO ו-CO נמצאים על

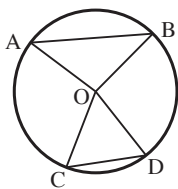
אותו הקוטר.

ד. מצא באיזה תחום נמצאת α אם הדלתון ABCO הוא:

(1) מרובע קמור (כמו בצירוף).

(2) מרובע קעור.





- 11) הוכח את המשפט: אם במעגל זווית מרכזית אחת יותר גדולה מזווית מרכזית שנייה אז המיתר המתאים לזווית הגדולה יותר גדול מהמיתר המתאים לזווית הקטנה ולהיפך. (הדרכה למשפט הישר: נתון: $\angle AOB > \angle COD$. $0^\circ < \angle AOB \leq 180^\circ$). צ"ל: $AB > CD$. סמן נקודה E על $\widehat{AB}$ כך ש- $\angle AOE = \angle COD$ והוכח $AB > AE$.

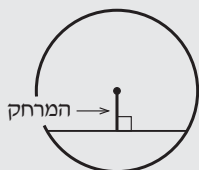
תשובות (זווית מרכזית, מיתרים וקשתות):

- 1) 96° . 2) $\frac{7}{18}$. 5) ב. 120° . 7) א. $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$. ב. 16 ס"מ.
8) ב. $85^\circ, 35^\circ$. 10) א. $360^\circ - 4\alpha$. ב. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. ג. 45° . ד. (1) $45^\circ < \alpha < 90^\circ$. (2) $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

אנך ממרכז המעגל למיתר

המרחק של מיתר מהמרכז

נגדיר תחילה מהו המרחק של מיתר ממרכז המעגל. זהו למעשה המרחק של נקודה מישר. (ראה בספר הנדסה חלק א' עמ' 364).



הגדרה:

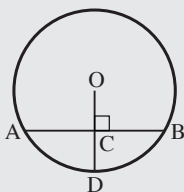
אורכו של הקטע המחבר את מרכז המעגל עם מיתר והמאונך לו נקרא מרחק המיתר מהמרכז.

אנך מהמרכז למיתר

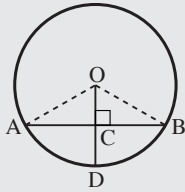
נדון עכשיו בתכונות של אנך ממרכז המעגל למיתר.

משפט:

אנך ממרכז המעגל למיתר במעגל – חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית הנשענת על המיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:
AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O.
OD הוא רדיוס החותך את המיתר בנקודה C.
נתון: $OC \perp AB$.
צ"ל: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$, $\angle AOC = \angle BOC$, $AC = BC$.



הוכחה:

נעביר את הרדיוסים AO ו-BO. המשולש AOB הוא שווה שוקים כי AO ו-BO הם רדיוסים. עפ"י הנתון הקטע OC הוא הגובה לבסיס במשולש הנ"ל ולכן הוא גם התיכון לבסיס, כלומר $AC = BC$. נוסף לכך הוא גם חוצה זווית הראש ולכן $\angle AOC = \angle BOC$. היות והזוויות המרכזיות AOD ו-BOD שוות זו לזו אז גם הקשתות שעליהן הזוויות נשענות הן שוות זו לזו, כלומר $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ מש"ל.

אנך מהמרכז למיתר – המשפטים ההפוכים

ננסח עכשיו משפטים הפוכים למשפט האחרון.

משפט:

קטע המחבר את מרכז המעגל עם האמצע של מיתר – מאונך למיתר.

הערה: להוכחת המשפט ראה תרגיל 1 בעמ' זה למטה.

משפט:

קטע ממרכז המעגל שחוצה זווית מרכזית – חוצה את המיתר שעליו נשענת הזווית ומאונך לו.

הערה: להוכחת המשפט ראה תרגיל 2 בעמ' זה למטה.

משפט:

אנך מאמצע מיתר במעגל עובר דרך מרכז המעגל.

הערה: להוכחת המשפט ראה תרגיל 3 בעמ' הבא.

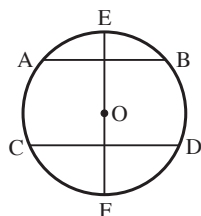
תרגילים

(אנך ממרכז המעגל למיתר)

תרגילים יסודיים – אנך ממרכז המעגל למיתר

- (1) הוכח את המשפט (ראה בעמ' זה למעלה): קטע המחבר את מרכז המעגל עם האמצע של מיתר – מאונך למיתר.
- (2) הוכח את המשפט (ראה בעמ' זה למעלה): קטע ממרכז המעגל שחוצה זווית מרכזית – חוצה את המיתר שעליו נשענת הזווית ומאונך לו.

(3) הוכח את המשפט (ראה בעמ' הקודם): **אנך מאמצע מיתר במעגל עובר דרך מרכז המעגל.**



(4) AB ו-CD הם מיתרים במעגל

שמרכזו O. EF הוא קוטר והוא

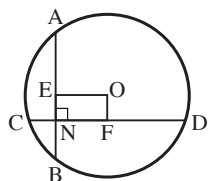
חוצה את המיתרים.

א. הוכח: $AB \parallel CD$.

ב. נתון: $\angle ABO > \angle CDO$.

הוכח שהמרובע ABDC הוא טרפז.

תרגילים נוספים – אנך ממרכז המעגל למיתר



(5) AB ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O

המאונכים זה לזה שנחתכים בנקודה N.

הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי

המיתרים AB ו-CD.

א. הסבר מדוע המרובע EOFN הוא מלבן.

ב. נתון: $CN = 2$ ס"מ, $OE = 5$ ס"מ. חשב את CD ו-ND.

ג. נתון: $BN = 3$ ס"מ, $AE = 5.5$ ס"מ. חשב את OF ו-AN.

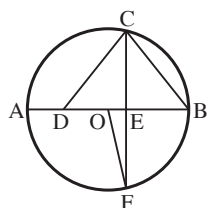
ד. מהו מרחק המיתר AB מהמרכז ומהו מרחק המיתר CD מהמרכז?

(אין צורך לבצע חישובים נוספים).

(6) AB ו-AC הם שני מיתרים שווים במעגל שמרכזו O. המשך הרדיוס BO חוצה את המיתר

AC בנקודה D.

הוכח: $OD = \frac{1}{2}AO$.



(7) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. המיתר CF חוצה את

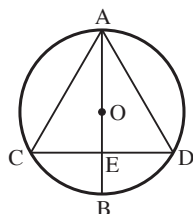
הזווית BCD. הנקודה E היא אמצע CF והיא נמצאת

בין O ל-B.

א. הוכח: $BC = DC$.

ב. נתון: $\angle OFE = 10^\circ$. חשב את זווית המשולש BDC.

ג. (ללא קשר לנתון של סעיף ב') הוכח: $\angle EOF = \angle BCD$.



(8) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O והוא חוצה את

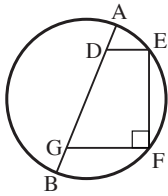
המיתר CD בנקודה E. נתון: $OE = BE$.

א. הוכח: המשולש ACD הוא שווה צלעות.

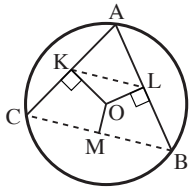
ב. הוכח: המרובע שקודקודיו הם O, D, B ו-C

הוא מעוין.

ג. חשב את זוויתו של המעוין.



- 9) AB הוא קוטר במעגל. DEFG הוא טרפז ישר זווית שבו $DE \parallel GF$ ו- $\angle F = 90^\circ$.
(הנקודות D ו-G נמצאות על הקוטר והנקודות E ו-F נמצאות על המעגל).
א. הוכח: $AD = BG$.
ב. הוכח: $DE + GF < AB$.



- 10) AB ו-AC הם מיתרים במעגל שמרכזו O. מהמרכז הורידו אנכים OL ו-OK למיתרים.
א. הוכח: $KL \parallel CB$, $KL = \frac{1}{2} CB$.
ב. נתון: $ML \parallel AC$. הוכח: $OM \perp CB$.

תשובות (אנך ממרכז המעגל למיתר):

- 5) ב. 14 ס"מ, 12 ס"מ. ג. 2.5 ס"מ, 8 ס"מ. ד. 5 ס"מ, 2.5 ס"מ. 7) ב. 50° , 80° .

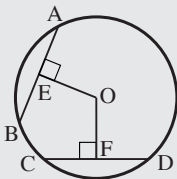
מיתרים ומרחקיהם מהמרכז

מיתרים ומרחקיהם מהמרכז

נדרן עכשיו בקשר שבין מיתרים למרחקיהם ממרכז המעגל.

משפט:

מיתרים שווים במעגל נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

AB ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O.

נתון: $AB = CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$.

צ"ל: $OE = OF$.

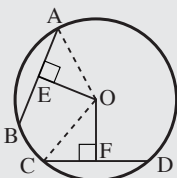
הערה: עפ"י הסעיף הקודם מתקיים:

$AE = BE$, $CF = DF$.

הוכחה:

נעביר את הרדיוסים AO ו-CO.

ונחפוף את המשולשים AEO ו-CFO.



$$\left. \begin{array}{l} \text{(רדיוסים)} \quad AO = CO \\ \text{(כחצאי מיתרים שווים, נתון: } AB = CD) \quad AE = CF \\ \text{(נתון: } OE \perp AB, OF \perp CD) \quad \angle AEO = \angle CFO = 90^\circ \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

$$\text{(עפ"י צ.צ.ז.)} \quad \triangle AEO \cong \triangle CFO$$

$\Downarrow$

$$\text{(צלעות מתאימות במשולשים חופפים)} \quad OE = OF$$

מש"ל.

קיים גם המשפט ההפוך.

משפט:

מיתרים במעגל הנמצאים במרחקים שווים מהמרכז – שווים זה לזה.

הערה: להוכחת המשפט ראה תרגיל 2 בעמ' 279.

דוגמא:

AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל השווים זה לזה שנחתכים בנקודה K. הוכח: $AK = CK$.

פתרון:

נסמן את המרכז ב-O ונוריד אנכים OE ו-OF למיתרים AB ו-CD בהתאמה.

נעבור להוכחה:

שלב א': נחפוף את המשולשים OEK ו-OFK.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(צלע משותפת)} \quad OK = OK \\ \text{(מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים מהמרכז)} \quad OE = OF \\ \text{(עפ"י בניית העזר)} \quad \angle OEK = \angle OFK = 90^\circ \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

$$\text{(עפ"י צ.צ.ז.)} \quad \triangle OEK \cong \triangle OFK$$

$\Downarrow$

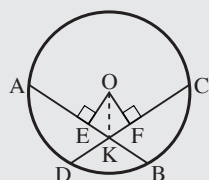
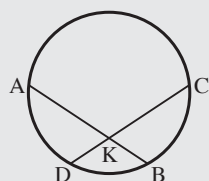
$$\text{(צלעות מתאימות במשולשים חופפים)} \quad EK = FK$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(כחצאי מיתרים שווים)} \quad AE = CF \\ \text{(הוכחנו בשלב א')} \quad EK = FK \end{array} \right\} \quad \text{שלב ב':}$$

$\Downarrow$

$$\text{(חיבור קטעים שווים לקטעים שווים)} \quad AK = CK$$

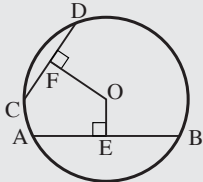
מש"ל.



אי שוויונות בין מיתרים ומרחקיהם מהמרכז נראה עכשיו את הקשר בין גודלו של מיתר למרחקו מהמרכז.

משפט:

אם במעגל מיתר אחד יותר גדול ממיתר שני אז מרחקו מהמרכז של המיתר הגדול יותר קטן ממרחקו מהמרכז של המיתר הקטן.



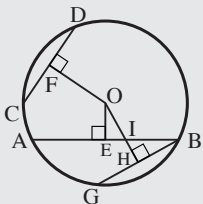
ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

AB ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O.

נתון: $AB > CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$.

צ"ל: $OE < OF$.

הוכחה:



נבנה מיתר BG השווה למיתר CD כך שהנקודה G

נמצאת על הקשת AB הקטנה. הדבר אפשרי כי

עפ"י הנתון $AB > CD$ ולכן גם $\widehat{AB} > \widehat{CD}$.

עכשיו נוריד אנך OH למיתר BG. האנך חותך את

המיתר AB בנקודה I. כי $OE < OI$ הוא

ניצב במשולש ישר הזווית OEI והוא קטן מהיתר OI.

כמו כן ברור שמתקיים $OI < OH$ (השלם גדול מחלקו) ולכן גם $OE < OH$.

המיתרים AB ו-CD שווים ולכן המרחקים שלהם מהמרכז שווים, כלומר $OE = OH$.

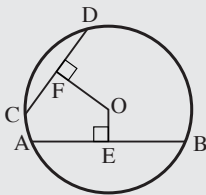
מכאן שמתקיים $OE < OF$.

מש"ל.

ננסה את המשפט ההפוך.

משפט:

אם במעגל מרחקו מהמרכז של מיתר אחד יותר קטן ממרחקו מהמרכז של מיתר שני אז המיתר הראשון יותר גדול מהמיתר השני.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

AB ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O.

נתון: $OE < OF$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$.

צ"ל: $AB > CD$.

הוכחה:

נניח בשלילה שלא מתקיים $AB > CD$. אם מתקיים $AB = CD$ נקבל (עפ"י המשפט:

"מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים מהמרכז") $OE = OF$ וזאת סתירה לנתון.

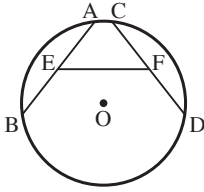
אם מתקיים $AB < CD$ נקבל עפ"י המשפט האחרון $OE > OF$ וזאת שוב סתירה לנתון.

לכן מתקיים $AB > CD$.

מש"ל.

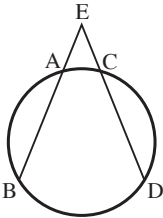
תרגילים (מיתרים ומרחקיהם מהמרכז)

תרגילים יסודיים – מיתרים ומרחקיהם מהמרכז

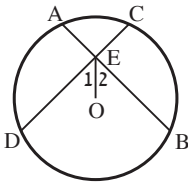


- (1) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O השווים זה לזה כמתואר בציור. הנקודות E ו-F הן אמצעי המיתרים.
הוכח: $\angle AEF = \angle CFE$

- (2) הוכח את המשפט: **מיתרים במעגל הנמצאים במרחקים שווים מהמרכז – שווים זה לזה.**

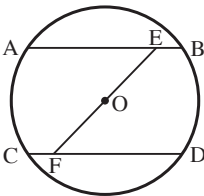


- (3) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל השווים זה לזה שהמשכיהם נפגשים בנקודה E.
הוכח: $BE = DE$



- (4) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O הנחתכים בנקודה E.
נתון: $\angle E_1 = \angle E_2$.
(ראה את סימון הזוויות בציור).
א. הוכח: $AB = CD$
ב. הוכח: $AC \parallel DB$

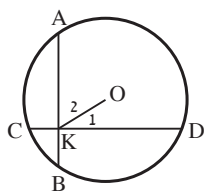
תרגילים נוספים – מיתרים ומרחקיהם מהמרכז



- (5) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O השווים זה לזה. הקטע EF עובר דרך המרכז O.
נתון: $EO = FO$.
הוכח: המרובע ABDC הוא מלבן.

- (6) AB ו-CD הם שני מיתרים (לא מקבילים) במעגל שאינם חותכים זה את זה. EF הוא מיתר שחוצה את המיתרים AB ו-CD בנקודות G ו-H בהתאמה.
א. נתון: $EG = FH$. הוכח: $AB = CD$
ב. הוכח את הטענה ההפוכה לזו שבסעיף א'.

אי שוויונות בין מיתרים ומרחקיהם מהמרכז

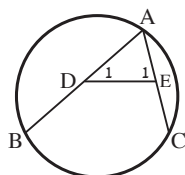


7) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל

שמרכזו O הנחתכים בנקודה K.

נתון: $AB \perp CD$, $\angle K_1 < \angle K_2$.
(ראה את סימון הזוויות בציור).

הוכח: $AB < CD$.



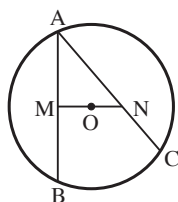
8) AB ו-AC הם מיתרים במעגל.

D ו-E הן בהתאמה אמצעי המיתרים.

נתון: $AB > AC$.

הוכח: $\angle D_1 < \angle E_1$.

(ראה את סימון הזוויות בציור).



9) AB ו-AC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.

הנקודה M היא אמצע המיתר AB. המשך

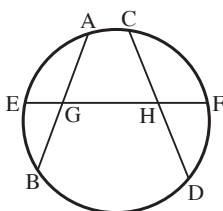
הקטע MO חותך את המיתר AC בנקודה N.

נתון: $MO = NO$.

א. הוכח: $AC > AB$.

ב. D היא נקודה על AO כך שמתקיים $AD = 2OD$.

הוכח: המשך הקטע MD חוצה את הקטע AN.



10) המיתר EF חוצה את המיתרים AB

ו-CD בנקודות G ו-H בהתאמה.

נתון: $EG < FH$.

הוכח: $AB < CD$.

תרגילים לחזרה – הגדרת המעגל, מיתרים וקשתות

סיכום המושגים העיקריים של הפרק השביעי:

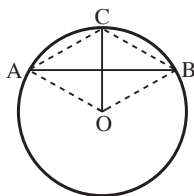
המעגל – המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה.

הנקודה הקבועה נקראת **מרכז המעגל**. המרחק הקבוע נקרא **רדיוס** וכך נקרא גם כל קטע המחבר את המרכז עם נקודה על המעגל. קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל נקרא **מיתר**. מיתר העובר דרך המרכז נקרא **קוטר**. חלק מהמעגל שבין שתי נקודות נקרא **קשת**.

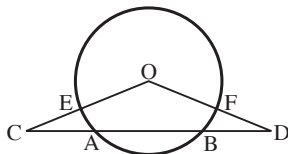
זווית מרכזית – זווית שהקודקוד שלה במרכז המעגל.
משפט – על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות ולהיפך.
משפט – זוויות מרכזיות שוות נשענות על קשתות שוות ולהיפך.
משפט – למיתרים שווים מתאימות קשתות שוות ולהיפך.
משפט – לזווית המרכזית הגדולה מתאימה הקשת הגדולה ומתאים המיתר הגדול ולהיפך.
מרחק מיתר מהמרכז – אורכו של הקטע המחבר את מרכז המעגל עם המיתר ומאונך לו.
משפט – אנך ממרכז המעגל למיתר במעגל – חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית הנשענת על המיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר ולהיפך.
משפט – מיתרים שווים במעגל נמצאים במרחקים שווים מהמרכז ולהיפך.
משפט – אם במעגל מיתר אחד יותר גדול ממיתר שני אז מרחקו מהמרכז של המיתר הגדול יותר קטן ממרחקו מהמרכז של המיתר הקטן ולהיפך.

תרגילים

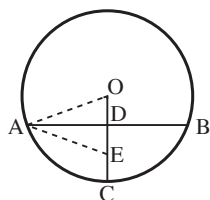
(תרגילים לחזרה – הגדרת המעגל, מיתרים וקשתות)



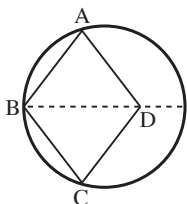
- (1) במעגל שמרכזו O הרדיוס CO והמיתר AB חוצים זה את זה.
א. הוכח: המרובע ACBO הוא מעוין.
ב. חשב את זווית המעוין.



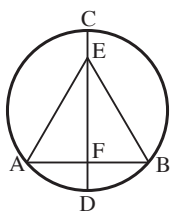
- (2) AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O. משני הצדדים, בהמשכו של המיתר, היקצו קטעים שווים $AC = BD$. הקטעים CO ו-DO חותכים את המעגל בנקודות E ו-F.
א. הוכח: $CE = DF$.
ב. $AE = BF$.



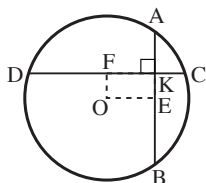
- 3) AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O. הרדיוס OC חוצה את המיתר AB בנקודה D. נתון: $OD = DE = EC$. כמו כן נתון שהיקף המשולש AEO הוא p. הבע באמצעות p את קוטר המעגל. (נמק כל שלב בתשובתך).



- 4) ABCD הוא מעוין. דרך הקודקודים A, B ו-C עובר מעגל. א. הוכח: האלכסון BD של המעוין נמצא על קוטר של המעגל. ב. נתון: $\widehat{AB} = 80^\circ$. חשב את זווית המעוין.

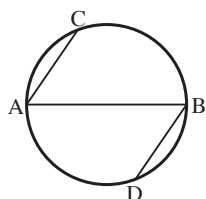


- 5) AB ו-CD הם מיתרים במעגל הניצבים זה לזה שנחתכים בנקודה E. F היא נקודה על CD כך שמתקיים $AE = BE$. א. הוכח: CD הוא קוטר במעגל. ב. נתון: $EF = AB$, $CE = DF$. חשב את גודל הקשת $\widehat{AD}$ במעלות.



- 6) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O המאונכים זה לזה שנחתכים בנקודה K. הנקודה E היא אמצע AB והנקודה F היא אמצע CD. נתון: $AK = a$, $BK = b$ ($b > a$), $CK = c$, $DK = d$ ($d > c$). הבע באמצעות a, b, c ו-d את היקף המרובע OEKF. (נמק כל שלב בתשובתך).

- 7) AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O. C ו-D הן נקודות על הקשת הקטנה AB. A ל-D. הרדיוסים CO ו-DO חותכים את המיתר AB בנקודות E ו-F בהתאמה. נתון: $\widehat{AC} = \widehat{BD}$. הוכח: א. $AE = BF$. ב. $AB \parallel CD$.



- 8) AB הוא קוטר במעגל. AC ו-BD הם מיתרים. נתון: $AC \parallel BD$. הוכח: א. $AC = BD$. ב. CD הוא קוטר במעגל.

9) בתוך מעגל נתונה נקודה השונה מהמרכז.

הוכח: המיתר **הקטן ביותר** שעובר דרך הנקודה הוא המיתר שהנקודה היא **האמצע** שלו.
(הדרכה: ניתן לראות הדרכה בתשובה לתרגיל).

10) א. AB הוא קוטר במעגל. C ו-D הן שתי נקודות על המעגל הנמצאות בצדדים שונים של AB.

(1) נתון ש-AB חוצה את CD. האם ייתכן ש-AB **לא מאונך** ל-CD? נמק.

(2) (ולא קשר לנתון של סעיף 1). נתון ש-AB **מאונך** ל-CD. האם ייתכן ש-AB **לא חוצה** את CD? נמק.

ב. השלם:

(1) אם קוטר במעגל חוצה מיתר אז הקוטר _____ למיתר או שהמיתר הוא _____.

(2) אם קוטר במעגל מאונך למיתר אז הקוטר _____ את המיתר.

הערה: תרגילים 11–15 הם תרגילים יותר קשים מהרגיל.

11) במעגל שמרכזו O מחלק

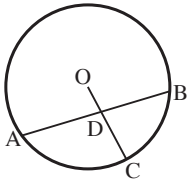
הרדיוס OC את המיתר AB

לשני קטעים AD ו-BD.

א. הוכח: $CD < AD$, $CD < BD$.

ב. נתון: $\widehat{AC} > \widehat{CB}$.

הוכח: $AD > DB$.



12) ABC הוא משולש החסום במעגל שמרכזו O

כך שהצלע BC היא קוטר. הנקודות D ו-E

נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו-AC.

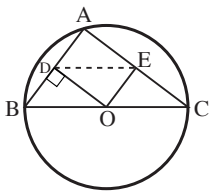
נתון: $OD \perp AB$, $DE \parallel BC$.

א. הוכח: $OE \perp AC$.

ב. סמן ב-F את אמצע BO וב-H את אמצע CO.

הוכח: המרובע DEHF הוא מקבילית.

ג. נתון שרדיוס המעגל הוא R. הבע באמצעות R את היקף המקבילית DEHF.



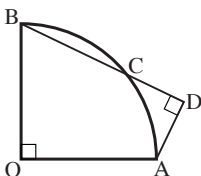
13) AO ו-BO הם רדיוסים ברבע מעגל

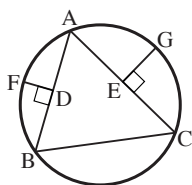
שמרכזו O הניצבים זה לזה. הנקודה

D נמצאת על המשכו של המיתר BC.

נתון: $AD \perp CD$.

הוכח: $AD = CD$.





- 14** המשולש ABC חסום במעגל. הנקודות D ו-E הן בהתאמה אמצעי הצלעות AB ו-AC. הנקודות F ו-G נמצאות על המעגל כך שמתקיים $FD \perp AB$ ו- $GE \perp AC$. נתון: $FD < GE$. הוכח: $\angle B > \angle C$.
 ב. שרטט בציור את הקטע FG וסמן את נקודות החיתוך שלו עם AB ו-AC ב-K ו-L בהתאמה. הוכח: המשולש AKL הוא שווה שוקיים.

- 15** AB ו-AC הם מיתרים במעגל שמרכזו O. D היא נקודה על AB כך ש-OD ניצב ל-AB. E היא נקודה על AC כך ש-OE ניצב ל-AC. הקטעים BE ו-CD נחתכים בנקודה F. הוכח: $CF = 2DF$, $BF = 2EF$.
 ב. נתון: $AF = \frac{1}{3} BC$. הוכח: $AB \perp AC$.

תשובות (תרגילים לחזרה – הגדרת המעגל, מיתרים וקשתות):

- 1) ב. $60^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 60^\circ$. 3) $\frac{3}{4}p$. 5) ב. 45° . 6) $b-a+d-c$.
 9) הדרכה: סמן במעגל שני מיתרים AB ו-CD שנחתכים בנקודה E השונה מהמרכז. נתון: $AE = BE$. צ"ל: $AB < CD$. 10) ב. (1) מאונך, קוטר. (2) חוצה. 12) ג. 3R.

פרק שמיני

הנדסת המישור – זוויות במעגל

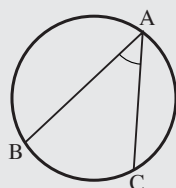
זווית היקפית

הגדרת הזווית ההיקפית

נגדיר תחילה סוג נוסף של זוויות במעגל.

הגדרה:

זווית היקפית – זווית שהקודקוד שלה על המעגל ושוקיה חותכות את המעגל נקראת זווית היקפית.

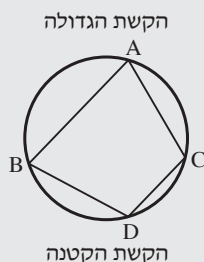


לדוגמא – הזווית BAC שבציור היא זווית היקפית.

הערות:

(א) כמו במקרה של זווית מרכזית, גם במקרה זה אומרים שהזווית ההיקפית BAC **נשענת על הקשת BC**. ההבדל הוא שכאשר נתונה קשת אז יש בדיוק **זווית מרכזית אחת** הנשענת עליה אבל יש **אינסוף זוויות היקפיות** הנשענות עליה.

(ב) חשוב לשים לב שזווית היקפית **שנשענת על קשת היא זווית שהקודקוד שלה לא נמצא על הקשת**.



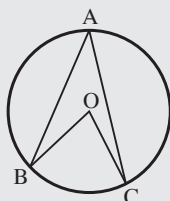
לדוגמא: הקודקוד A של הזווית ההיקפית BAC שנשענת על הקשת BC **לא נמצא על** הקשת BC הקטנה. **באופן דומה** הקודקוד D של הזווית ההיקפית BDC שנשענת על הקשת הגדולה BC **לא נמצא על** הקשת הגדולה BC.

זווית היקפית וזווית מרכזית הנשענות על אותה קשת

ננסח עכשיו את המשפט העיקרי המראה את הקשר בין הזווית המרכזית לזווית היקפית הנשענת על אותה קשת.

משפט:

זווית מרכזית במעגל גדולה פי 2 מכל זווית היקפית הנשענת על אותה הקשת.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

נתון: הזווית BOC היא זווית מרכזית

והזווית BAC היא זווית היקפית.

צ"ל: $\angle BOC = 2\angle BAC$

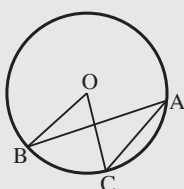
נבחין בין שלושה מקרים:

(א) מרכז המעגל נמצא על אחת משוקי הזווית ההיקפית. (ראה ציור ימני למטה).

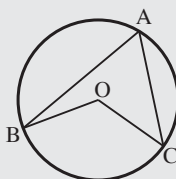
(ב) מרכז המעגל נמצא בין שוקי הזווית ההיקפית. (ראה ציור אמצעי למטה).

(ג) מרכז המעגל נמצא מחוץ לשוקי הזווית ההיקפית. (ראה ציור שמאלי למטה).

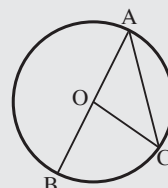
מקרה ג'



מקרה ב'



מקרה א'



הוכחה של מקרה א':

אם נסמן $\angle BAC = \alpha$ אז גם $\angle ACO = \alpha$

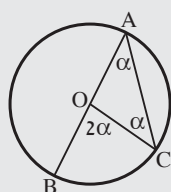
כי $AO = CO$ (רדיוסים במעגל).

הזווית BOC היא זווית חיצונית למשולש

AOC ולכן $\angle BOC = \alpha + \alpha = 2\alpha$

כלומר $\angle BOC = 2\angle BAC$

מש"ל.



הוכחה של מקרה ב':

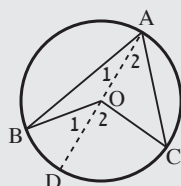
נעביר קוטר AD. עפ"י מקרה א':

$\angle O_1 = 2\angle A_1$ וכן $\angle O_2 = 2\angle A_2$. מכאן נקבל:

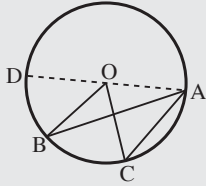
$\angle BOC = \angle O_1 + \angle O_2 = 2\angle A_1 + 2\angle A_2 = 2(\angle A_1 + \angle A_2) = 2\angle BAC$

כלומר $\angle BOC = 2\angle BAC$

מש"ל.



הוכחה של מקרה ג':



נעביר קוטר AD. עפ"י מקרה א':
 $\angle DOB = 2\angle DAB$ וכן $\angle DOC = 2\angle DAC$
 $\angle BOC = \angle DOC - \angle DOB = 2\angle DAC - 2\angle DAB =$
 $= 2(\angle DAC - \angle DAB) = 2\angle BAC$
 כלומר $\angle BOC = 2\angle BAC$

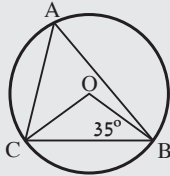
מש"ל.

הערה:

כפי שלמדנו, גודלה של קשת במעלות שווה לגודלה של הזווית המרכזית הנשענת עליה.
 לכן עפ"י המשפט האחרון נוכל לנסח את המסקנה הבאה:

קשת במעגל (במעלות) גדולה פי 2 מכל זווית היקפית הנשענת עליה.

דוגמא א':



הנקודות A, B ו-C נמצאות על מעגל שמרכזו O.
 נתון: $\angle CBO = 35^\circ$. חשב את הזווית A.

פתרון:

המשולש BOC הוא שווה שוקיים כי $BO = CO$ (שני רדיוסים). לכן $\angle BOC = 180^\circ - 2 \cdot 35^\circ = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.
 עפ"י המשפט האחרון הזווית BOC גדולה פי 2 מהזווית A ולכן $\angle A = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.
 לסיום נדגיש את המשפט הבא (ראה עמ' 349) שמתקבל מהמשפט העיקרי:
במרובע החסום במעגל סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180° .

זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת

כמסקנה מהמשפט האחרון נביא את המשפט הבא.

משפט:

כל הזוויות ההיקפיות במעגל הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו.

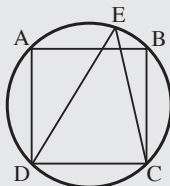
הוכחה:



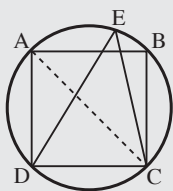
כל הזוויות ההיקפיות שוות למחצית מהזווית המרכזית הנשענת על הקשת ולכן הן שוות זו לזו.

מש"ל.

דוגמא ב':



ABCD הוא ריבוע החסום במעגל.
 E היא נקודה כלשהי על הקשת AB.
 חשב את הזווית DEC.



פתרון:

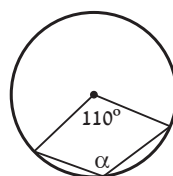
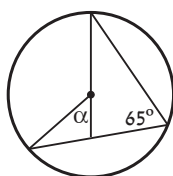
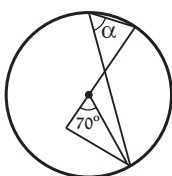
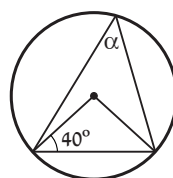
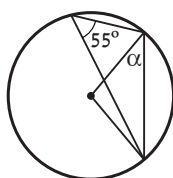
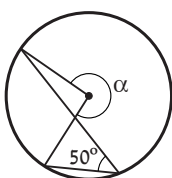
נשרטט את האלכסון AC. הזווית DAC ו-DEC נשענות על אותה הקשת DC ולכן הן שוות זו לזו.
 $\angle DAC = 45^\circ$ כי היא זווית בין אלכסון לצלע
 בריבוע ולכן גם $\angle DEC = 45^\circ$.

תרגילים (זווית היקפית)

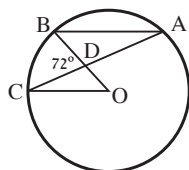
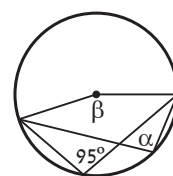
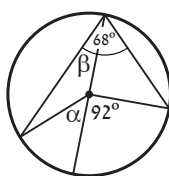
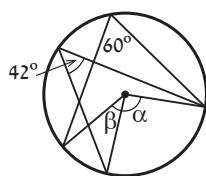
זווית היקפית וזווית מרכזית הנשענות על אותה קשת

תרגילים יסודיים – זווית היקפית וזווית מרכזית הנשענות על אותה קשת

- (1) מצא את הזווית α עפ"י הנתון בציורים הבאים:
 (הערה: מרכז המעגל (גם בהמשך) מסומן ע"י נקודה מודגשת).

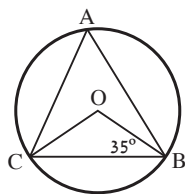


- (2) מצא את הזווית α ו- β עפ"י הנתונים בציורים הבאים:



- (3) AB ו-AC הם מיתרים במעגל שמרכזו O. הרדיוס BO חותך את המיתר AC בנקודה D.
 נתון: $\angle BDC = 72^\circ$, $AB \parallel CO$.
 חשב את הזווית A ו-B.

תרגילים נוספים – זווית היקפית וזווית מרכזית הנשענות על אותה קשת



4) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

א. נתון: $\angle CBO = 35^\circ$.

חשב את זווית המשולש ABC אם נתון

שהוא שווה שוקיים. הבחן בין שני מקרים.

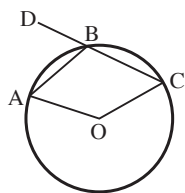
ב. מה צריך להיות גודל הזווית CBO

שבסעיף א' כדי שיתקבל רק מקרה אחד?

5) נתון מעגל שמרכזו O וקוטרו 20 ס"מ. AB ו-AC הם שני מיתרים במעגל שהזווית

ביניהם היא 15° . D היא נקודה על OC כך שמתקיים $BD \perp OC$.

חשב את אורך הקטע BD.



6) ABCO הוא מרובע שקודקדיו A, B ו-C נמצאים

על המעגל והקודקוד O שלו הוא מרכז המעגל.

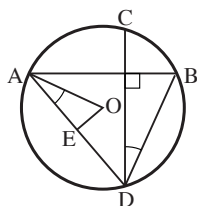
הנקודה D נמצאת על המשך הצלע BC.

א. הוכח: $\angle AOC = 2\angle ABD$.

ב. הוכח: $\angle ABC = \angle A + \angle C$.

ג. נתון: $\angle A + \angle C = 115^\circ$.

חשב את הזווית AOC.



7) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O

הניצבים זה לזה. הנקודה E היא אמצע המיתר AD.

א. הוכח: $\angle BDC = \angle EAO$.

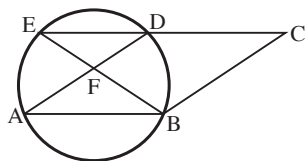
ב. נתון: $\angle BDC = \angle BAO$. הוכח: $AB = AD$.

ג. נתון: $\angle ADC = 3\angle BDC$. חשב את זווית

המשולש ABD.

זווית היקפית הנשענות על אותה קשת

תרגילים יסודיים – זווית היקפית הנשענות על אותה קשת



8) המרובע ABCD הוא מקבילית שדרך שלושה

מקודקודיה עובר מעגל שחותך את המשך

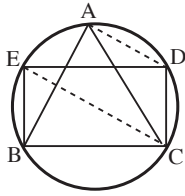
הצלע DC בנקודה E.

א. הוכח: המשולש BEC הוא שווה שוקיים.

ב. נתון: $\angle AFE = 70^\circ$. F היא נקודת

החיתוך של AD ו-BE. חשב את

זווית המקבילית.



9) ABC הוא משולש שווה צלעות ו-EDCB הוא

מלבן והם חסומים במעגל כמתואר בצירוף.

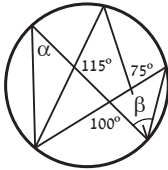
א. חשב את הזווית BEC ו-DAC.

ב. הוכח: $AD = DC$

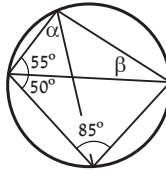
ג. הוכח: $AD \parallel CE$

תרגילים נוספים – זווית היקפית הנשענות על אותה קשת

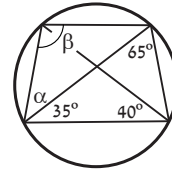
10) מצא עפ"י הנתון בצירורים הבאים את הזווית α ו- β :



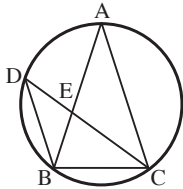
א.



ב.



ג.



11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).

המיתר CD חוצה את הזווית ACB וחותך את

המיתר AB בנקודה E. נתון: $BD \parallel AC$

א. חשב את זווית המשולש ABC.

ב. הוכח: $DE = BE$

12) ABC הוא משולש שווה שוקיים שבו $AB = AC$ והוא חסום במעגל. הנקודה D נמצאת

על המשך הבסיס BC מהצד של C כך ש- $AC = CD$. AD חותך את המעגל בנקודה E.

א. הוכח: BE חוצה את הזווית ABC.

ב. נתון: $\widehat{BC} = \widehat{CE}$. חשב את הזווית BAC.

תשובות (זווית היקפית):

1) א. 50° . ב. 35° . ג. 260° . ד. 125° . ה. 50° . 2) א. $95^\circ, 170^\circ$. ג. $84^\circ, 36^\circ$.

3) $48^\circ, 24^\circ$. 4) א. $55^\circ, 62.5^\circ, 62.5^\circ$ או $55^\circ, 55^\circ, 70^\circ$. ב. 30° . 5) 5 ס"מ.

6) ג. 130° . 7) ג. $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$. 8) ב. $35^\circ, 145^\circ, 35^\circ, 145^\circ$. 9) א. $60^\circ, 30^\circ$.

10) ב. $45^\circ, 30^\circ$. ג. $40^\circ, 60^\circ$. 11) א. $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$. 12) ב. 36° .

זווית היקפית הנשענות על קוטר

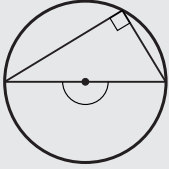
זווית היקפית הנשענות על קוטר

מסקנה חשובה נוספת מהמשפט האחרון היא המשפט הבא.

משפט:

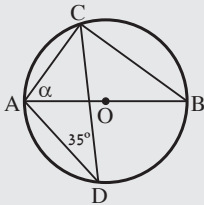
זווית היקפית במעגל הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.

הוכחה:



הזווית המרכזית המתאימה לזווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית שטוחה כלומר היא בת 180° . לכן כל זווית היקפית הנשענת על קוטר היא בת $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

מש"ל.



דוגמא א':

AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. C ו-D הן נקודות על המעגל. נתון: $\angle ADC = 35^\circ$. חשב את הזווית BAC המסומנת ב- α .

פתרון:

$\angle ABC = \angle ADC$ כזוויות היקפיות הנשענות על הקשת AC ולכן $\angle ABC = 35^\circ$. הזווית ACB היא זווית ישרה כי היא נשענת על הקוטר AB. לכן במשולש ABC נקבל $\alpha = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$. כלומר $\alpha = 55^\circ$.

זווית ישרה – נשענת על קוטר

גם המשפט ההפוך נכון.

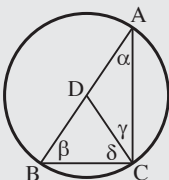
משפט:

זווית היקפית השווה ל- 90° נשענת על קוטר.

הוכחה:

הזווית המרכזית המתאימה היא בת 180° ולכן המיתר עליו היא נשענת הוא קוטר.

מש"ל.



דוגמא ב':

המשולש ABC חסום במעגל. D היא נקודה על AB כך שמתקיים: $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$. הוכח: AB הוא קוטר.

פתרון:

הוכחה:

עפ"י סכום הזוויות במשולש ABC מתקיים $\alpha + \gamma + \beta + \delta = 180^\circ$. לפי הנתון $\alpha = \gamma$ ו- $\beta = \delta$ לכן $2\gamma + 2\delta = 180^\circ$. מכאן, ע"י חילוק ב-2, נקבל $\gamma + \delta = 90^\circ$, כלומר $\angle ACB = 90^\circ$. עפ"י המשפט האחרון AB הוא קוטר כי נשענת עליו זווית ישרה. (קל לראות שהנקודה D היא מרכז המעגל).
מש"ל.

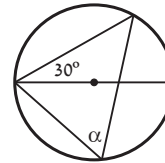
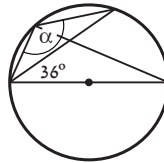
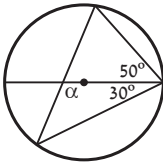
תרגילים

זווית היקפית הנשענת על קוטר

זווית היקפית הנשענת על קוטר

תרגילים יסודיים – זווית היקפית הנשענת על קוטר

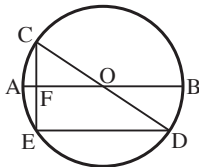
(1) מצא את הזווית α בתרגילים הבאים: (הנקודה המודגשת היא מרכז המעגל)



(2) AB ו-CD הם קטרים במעגל.

א. איזה מרובע הוא המרובע ACBD? נמק.

ב. איזה תנאי צריך להתקיים כדי שהמרובע יהיה ריבוע? נמק.



(3) AB ו-CD הם קטרים במעגל שמרכזו O. המיתר ED מקביל

לקוטר AB. המיתר CE חותך את הקוטר AB בנקודה F.

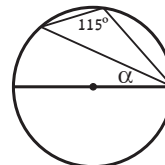
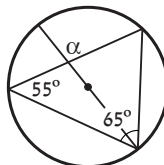
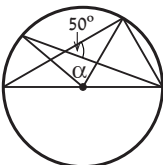
א. הוכח: $CE \perp AB$, $CF = EF$.

ב. נתון: $DC = 2a$, $DE = b$.

הבע את הקטעים AF ו-BF בעזרת a ו-b.

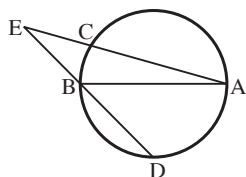
תרגילים נוספים – זווית היקפית הנשענת על קוטר

(4) מצא את הזווית α בציורים הבאים: (הנקודה המודגשת היא מרכז המעגל)

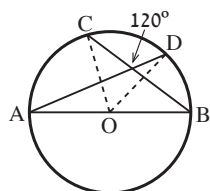


- (5) AB הוא קוטר במעגל. C היא נקודה על המעגל ו-M היא נקודה על AB כך שמתקיים: $AM = CM$.

הוכח: הנקודה M היא מרכז המעגל.



- (6) AB הוא קוטר במעגל. C ו-D הן נקודות על המעגל משני צדדיו של הקוטר. המשכי המיתרים AC ו-BD נפגשים בנקודה E. הוכח: א. $CE < BE$ ב. $DE < AE$.

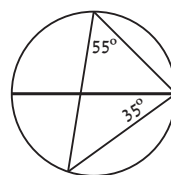
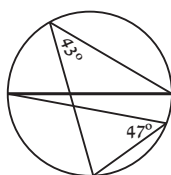
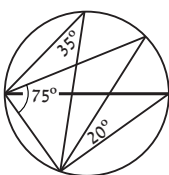


- (7) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. AD ו-BC הם מיתרים שהזווית הקהה ביניהם היא 120° . הוכח: המשולש COD הוא שווה צלעות.

זווית ישרה – נשענת על קוטר

תרגילים יסודיים – זווית ישרה – נשענת על קוטר

- (8) הוכח עפ"י הנתונים בצירים הבאים שהמיתר המודגש הוא קוטר במעגל:



- (9) AB, BC, CD ו-BD הם מיתרים במעגל.

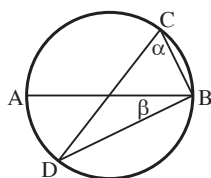
א. נתון: $\alpha + \beta = 90^\circ$.

הוכח: AB הוא קוטר במעגל.

ב. נסמן ב-O את נקודת החיתוך של המיתרים

AB ו-CD. נתון: $\angle DOB = 2\alpha$.

הוכח: הנקודה O היא מרכז המעגל.



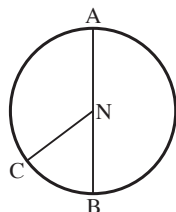
תרגילים נוספים – זווית ישרה – נשענת על קוטר

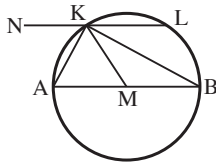
- (10) AB הוא מיתר במעגל. C נקודה על המעגל

ו-N נקודה על AB. נתון: $AN = BN = CN$.

הוכח: AB הוא קוטר במעגל

והנקודה N היא מרכז המעגל.





- 11 AB ו-KL הם מיתרים במעגל. הנקודה N נמצאת על המשך KL. המיתר BK חוצה את הזווית MKL והמיתר AK חוצה את הזווית MKN.
א. הוכח: המיתר AB הוא קוטר.
ב. נתון: $AB \parallel NL$. הוכח: הנקודה M היא מרכז המעגל.

תשובות (זווית היקפית הנשענת על קוטר):

- 1 א. 60° ב. 126° ג. 110° 3 ב. $a - \frac{b}{2}$, $a + \frac{b}{2}$ 4 א. 25° ב. 95° ג. 80° .

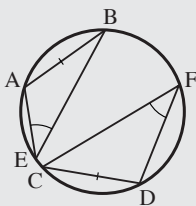
זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות

זוויות היקפיות ומיתרים

נראה עכשיו את הקשר בין זוויות היקפיות ומיתרים. על מיתר שאיננו קוטר נשענות אינסוף זוויות היקפיות חדות שוות ואינסוף זוויות היקפיות קהות שוות. הסכום של זווית חדה וזווית קהה הנשענות על אותו מיתר הוא 180° . (ראה עמ' 349).

משפט:

על מיתרים שווים במעגל נשענות זוויות היקפיות (חדות או קהות) שוות.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:
הזוויות E ו-F נשענות בהתאמה על המיתרים AB ו-CD שבמעגל.

נתון: $AB = CD$

צ"ל: $\angle E = \angle F$

הוכחה:

המיתרים AB ו-CD שווים זה לזה ולכן, עפ"י המשפט שבעמ' 269 למעלה, הזוויות המרכזיות הנשענות על המיתרים AB ו-CD שוות זו לזו. לכן גם הזוויות E ו-F שוות זו לזו כי הן שוות למחצית מהזוויות המרכזיות היות והן נשענות בהתאמה על אותן הקשתות.

מש"ל.

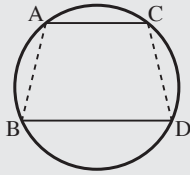
ננסח את המשפט ההפוך.

משפט:

זוויות היקפיות שוות במעגל – נשענות על מיתרים שווים.

הערה: להוכחת המשפט ראה תרגיל 1 בעמ' 296.

דוגמא:



AC ו-BD הם שני מיתרים במעגל בעלי אורך שונה.

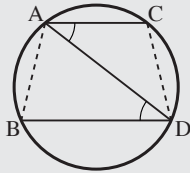
נתון: $AC \parallel BD$.

הוכח: $AB = CD$.

פתרון:

נעביר תחילה את המיתר AD ואחר כך נעבור להוכחה.

הוכחה:



(זוויות מתחלפות בין מקבילים) $\angle ADB = \angle CAD$

$\Downarrow$

(זוויות היקפיות שוות נשענות על $AB = CD$

מיתרים שווים)

מש"ל.

הערה:

עפ"י הנתון בדוגמא האחרונה המרובע ACDB שחסום במעגל הוא טרפז. נוכל אם כן לנסח את המסקנה הבאה:

כל טרפז שחסום במעגל הוא טרפז שווה שוקיים.

למעשה ניתן לנסח מסקנה יותר כללית (ראה את הציור שמופיע בדוגמא האחרונה):

אם AC ו-BD הם שני מיתרים במעגל שמקבילים זה לזה אז המרובע ACDB הוא טרפז שווה שוקיים או מלבן. אם אחד מהמיתרים המקבילים הוא קוטר אז המרובע הוא טרפז שווה שוקיים ולא מלבן. אם המיתרים המקבילים שווים באורכם אז המרובע הוא מלבן ואם המיתרים המקבילים שונים באורכם אז המרובע הוא טרפז שווה שוקיים.

זוויות היקפיות וקשתות

שני המשפטים האחרונים נכונים גם לקשתות. ננסח אותם (ללא הוכחה).

משפט:

על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות.

משפט:

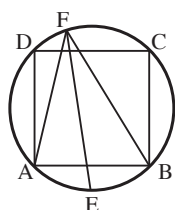
זוויות היקפיות שוות במעגל – נשענות על קשתות שוות.

תרגילים

(זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות)

תרגילים יסודיים – זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות

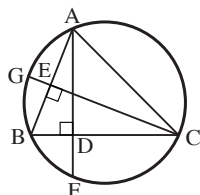
- (1) הוכח את המשפט: (ראה בעמ' 294)
זוויות היקפיות שוות במעגל – נשענות על מיתרים שווים.



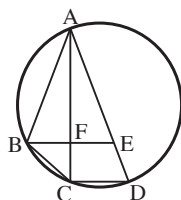
- (2) המרובע ABCD הוא ריבוע החסום במעגל. הנקודה E היא אמצע הקשת AB. הנקודה F היא נקודה כלשהי על הקשת DC.

חשב את הזוויות הבאות:

$$\angle EFC, \angle AFD, \angle BFE, \angle AFB$$

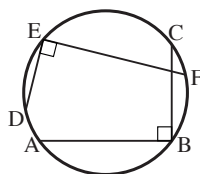


- (3) AD ו-CE הם גבהים במשולש חד זווית ABC החסום במעגל. המשכי הגבהים חותכים את המעגל בנקודות F ו-G. הוכח: א. המשולש BGF הוא שווה שוקיים.
ב. $\angle GBF = 2\angle ABC$.

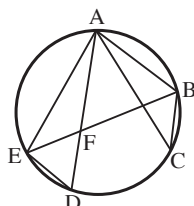


- (4) דרך הנקודות A, B, C ו-D עובר מעגל. E נקודה על המיתר AD. הקטע BE חותך את המיתר AC בנקודה F. נתון: $AB = AE$, $BC = CD$.
א. הוכח: $BF = EF$.
ב. נתון: $BE \parallel CD$. הוכח: AD הוא קוטר במעגל.

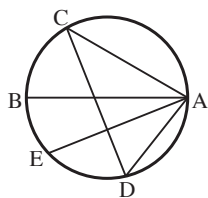
תרגילים נוספים – זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות



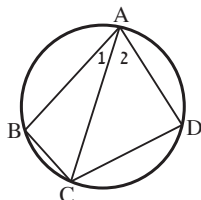
- (5) AB, BC, DE ו-EF הם מיתרים במעגל, כמתואר בציור. נתון: $AB \perp BC$, $DE \perp EF$.
א. קבע איזה מרובע הוא המרובע שקודקודיו הם A, D, C ו-F והוכח את תשובתך.
ב. הוכח: $\widehat{AB} + \widehat{BF} = \widehat{DE} + \widehat{EC}$.



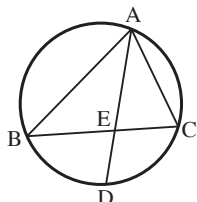
- (6) הנקודות A, B, C, D ו-E נמצאות על המעגל, כמתואר בציור. המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F. נתון: $BC = EF$, $AC = AE$.
א. הוכח: $\triangle ABC \cong \triangle AFE$.
ב. נתון ש-BC לא מקביל ל-ED. הוכח: המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.



- (7) AB הוא קוטר במעגל. AC, AD, AE ו-CD הם מיתרים במעגל. נתון: $\widehat{BC} = \widehat{DE}$.
 א. הוכח: $AE \perp CD$.
 ב. נסמן ב-F את החיתוך של AE ו-CD.
 ג. AD אמצע $\angle BAC$.
 הוכח: $\angle AFG = \angle BAC$.



- (8) הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על המעגל. נתון: $2\angle A_1 = \angle A_2$ (ראה את סימון הזוויות בציור).
 הוכח: א. $\widehat{BC} = \widehat{CD}$.
 ב. $2BC > CD$.



- (9) דרך הנקודות A, B, C ו-D עובר מעגל. המיתר AD חותך את המיתר BC בנקודה E.
 נתון: $\widehat{AB} > \widehat{AC}$, $\widehat{BD} = \widehat{CD}$.
 הוכח: $BE > CE$.
 (הערה: פתור מבלי להיעזר בתכונת חוצה זווית במשולש).

תשובות (זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות):

(2) $45^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ$.

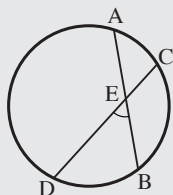
זווית פנימית במעגל וזווית חיצונית למעגל

זווית פנימית במעגל

בסעיף זה נדון בזווית פנימית במעגל.

הגדרה:

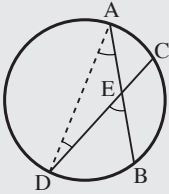
זווית פנימית – זווית הנוצרת בין שני מיתרים הנחתכים בתוך המעגל נקראת זווית פנימית במעגל.



לדוגמא: הנקודה E היא נקודת החיתוך של המיתרים AB ו-CD. הזווית BED היא זווית פנימית במעגל. גם שאר שלוש הזוויות הנוספות שנוצרות ע"י חיתוך שני המיתרים הנ"ל הן זוויות פנימיות.

משפט:

זווית פנימית במעגל שווה לסכום שתי הזוויות ההיקפיות הנשענות על הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

נתון: AB ו-CD הם מיתרים במעגל

הנחתים בנקודה E.

צ"ל: $\angle BED = \angle A + \angle D$

הערה: הזווית A נשענת על הקשת BD שהיא הקשת הכלואה בין שוקי הזווית BED. הזווית D נשענת על הקשת AC שהיא הקשת הכלואה בין המשכי שוקי הזווית BED. נסתמך על המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה".

הוכחה:

הזווית BED היא זווית חיצונית למשולש AED ולכן היא שווה לסכום שתי הזוויות A ו-D שהן הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

מש"ל.

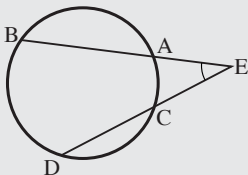
הערה: למעשה פתרנו כבר תרגילים עם זווית פנימית במעגל מבלי לציין זאת במפורש.

זווית חיצונית למעגל

נגדיר עכשיו מהי זווית חיצונית למעגל.

הגדרה:

זווית חיצונית – זווית הנוצרת בין המשכי שני מיתרים הנפגשים מחוץ למעגל נקראת זווית חיצונית למעגל.



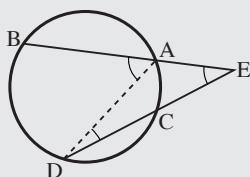
לדוגמא: הנקודה E היא נקודת הפגישה

של המשכי המיתרים AB ו-CD. הזווית BED

היא זווית חיצונית למעגל.

משפט:

זווית חיצונית למעגל שווה להפרש שבין שתי הזוויות ההיקפיות הנשענות על הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

נתון: AB ו-CD הם מיתרים במעגל

שהמשכיהם נפגשים בנקודה E.

צ"ל: $\angle BED = \angle BAD - \angle D$

הערה: הזווית BAD נשענת על הקשת BD שהיא הקשת הגדולה הכלואה בין שוקי הזווית BED. הזווית D נשענת על הקשת AC שהיא הקשת הקטנה הכלואה בין שוקי הזווית BED. כמו בהוכחת המשפט על הזווית הפנימית במעגל נסתמך גם כאן על המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה".

הוכחה:

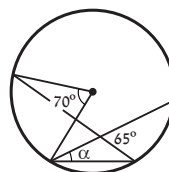
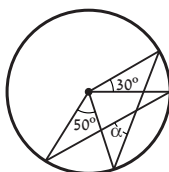
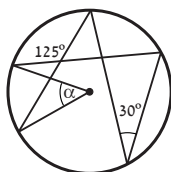
הזווית BAD היא זווית חיצונית למשולש ADE ולכן היא שווה לסכום שתי הזוויות D ו-E. $\angle BED = \angle BAD - \angle D$ לכן. שהן הזוויות הפנימיות במשולש שאינן צמודות לה. מש"ל.

תרגילים

(זווית פנימית במעגל וזווית חיצונית למעגל)

זווית פנימית במעגל

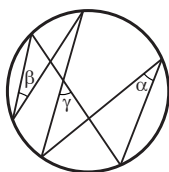
(1) מצא את הזווית המסומנת ב- α :



(2) בציור מצוירים 6 מיתרים.

הוכח עפ"י הציור שמתקיים:

$$\alpha + \beta = \gamma$$



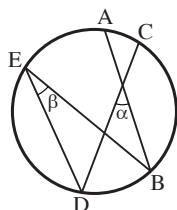
(3) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל החותכים

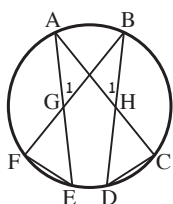
זה את זה בתוך המעגל. E היא נקודה על

הקשת AD כמתואר בציור.

א. הוכח עפ"י הציור שמתקיים: $\alpha > \beta$

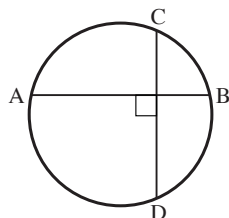
ב. נסח במילים את הטענה שהוכחת בסעיף א'.





- (4) המיתרים AC ו-BD נחתכים בנקודה H.
 המיתרים AE ו-BF נחתכים בנקודה G.
 נתון: $CD = EF$.

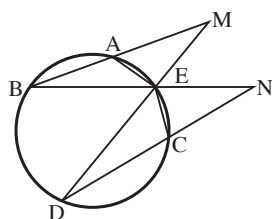
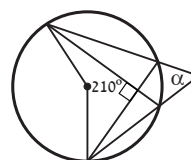
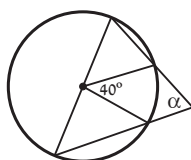
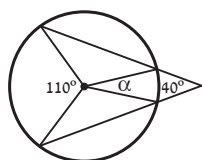
הוכח: הזוויות הפנימיות G_1 ו- H_1 שוות זו לזו. (ראה את סימון הזוויות בציור).



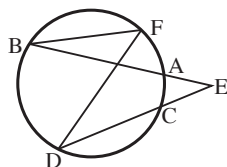
- (5) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל המאונכים זה לזה.
 הוכח: $\widehat{AC} + \widehat{BD} = \widehat{BC} + \widehat{AD}$.

זווית חיצונית למעגל

- (6) מצא את הזווית המסומנת ב- α :



- (7) המשכי המיתרים AB ו-DE נחתכים בנקודה M.
 המשכי המיתרים CD ו-BE נחתכים בנקודה N.
 נתון שהזווית החיצונית M ו-N שוות זו לזו.
 הוכח: כל נקודה על הישר DM נמצאת במרחקים שווים מהישרים AD ו-ND.



- (8) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל שהמשכיהם נחתכים בנקודה E.
 נקודה F כלשהי על הקשת AB.
 הוכח: $\angle BED < \angle BFD$.
 ב. נסח במילים את הטענה שהוכחת בסעיף א'.

תשובות (זווית פנימית במעגל וזווית חיצונית למעגל):

- (1) א. 30° . ב. 40° . ג. 50° . (3) ב. זווית פנימית במעגל גדולה מכל זווית היקפית הנשענת על הקשת הכלואה בין שוקי הזווית. (6) א. 60° . ב. 70° . ג. 30° . (8) ב. זווית חיצונית למעגל קטנה מכל זווית היקפית הנשענת על הקשת הגדולה הכלואה בין שוקי הזווית.

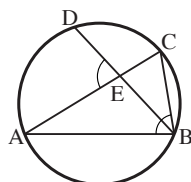
תרגילים לחזרה – זוויות במעגל

סיכום המושגים העיקריים של הפרק השמיני:

זווית היקפית – זווית שהקודקוד שלה על המעגל ושוקיה חותכות את המעגל.
משפט עיקרי – זווית מרכזית במעגל גדולה פי 2 מכל זווית היקפית הנשענת על אותה קשת.
משפט – כל הזוויות ההיקפיות במעגל הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו.
משפט – זווית היקפית במעגל הנשענת על קוטר היא זווית ישרה ולהיפך.
משפט – על מיתרים שווים במעגל נשענות זוויות היקפיות (חדות או קהות) שוות ולהיפך.
משפט – על קשתות שוות במעגל נשענות זוויות היקפיות שוות ולהיפך.
זווית פנימית – זווית הנוצרת בין שני מיתרים הנחתכים בתוך המעגל.
משפט – זווית פנימית במעגל שווה לסכום שתי הזוויות ההיקפיות הנשענות על הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית והמשכיהן.
זווית חיצונית – זווית הנוצרת בין המשכי שני מיתרים הנפגשים מחוץ למעגל.
משפט – זווית חיצונית למעגל שווה להפרש שבין שתי הזוויות ההיקפיות הנשענות על הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית.

תרגילים

(תרגילים לחזרה – זוויות במעגל)



(1) ABC הוא משולש החסום במעגל.

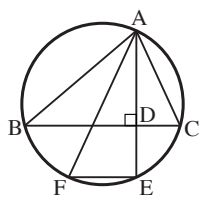
BD הוא מיתר כך שהנקודה C

היא אמצע הקשת BD.

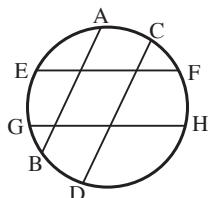
הוכח: $\angle AED = \angle ABC$.

E היא נקודת החיתוך של

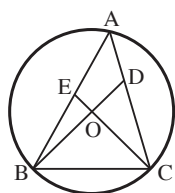
המיתרים AC ו-BD.



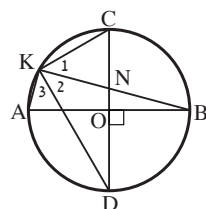
- 8) AD הוא גובה במשולש חד זווית ABC החסום במעגל.
 AF הוא קוטר. המשך AD חותך את המעגל בנקודה E.
 א. הוכח: $\angle BAF = \angle CAE$.
 ב. הוכח שהמרובע BFEC הוא טרפז שווה שוקיים.
 (הערה: עליך להוכיח שהמרובע לא יכול להיות מלבן.
 רמז: מהי התכונה של אלכסוני מלבן החסום במעגל?).



- 9) המיתרים AB ו-CD מקבילים זה לזה
 והמיתרים EF ו-GH מקבילים זה לזה.
 א. הוכח: $\widehat{AF} + \widehat{EB} = \widehat{CH} + \widehat{GD}$.
 ב. מה ניתן לומר על המרובעים ACDB ו-EFHG?

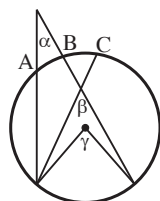


- 10) משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O. המשך BO חותך את AC בנקודה D והמשך CO חותך את AB בנקודה E.
 א. הוכח: $\angle BDC + \angle BEC = 3\angle A$.
 ב. המשך CE חותך את המעגל בנקודה נוספת שנסמן ב-F.
 המשך BD חותך את המעגל בנקודה נוספת שנסמן ב-G.
 נתון שהמרובע BCGF הוא ריבוע. חשב את סכום הזוויות: $\angle BDC + \angle BEC$.



- 11) AB ו-CD הם קטרים במעגל שמרכזו O הניצבים זה לזה.
 K היא נקודה על הקשת AC.
 א. הוכח: $\angle K_1 = \angle K_2 = \angle K_3$. (ראה את סימון הזוויות בציור).
 ב. נתון: $\angle KCD = 60^\circ$. חשב את הזווית KAB.
 ג. (ללא קשר לנתון של סעיף ב') הוכח: $\angle KAB = \angle KNC$.
 (N היא נקודת החיתוך של הקוטר CD והמיתר BK).

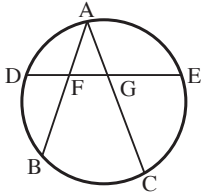
- 12) AB הוא מיתר, שהוא לא קוטר, במעגל. C היא נקודה "הנעה" על גבי הקשת הגדולה AB.
 בצורה כזאת נוצרות אינסוף זוויות היקפיות ACB.
 מצא היכן נמצאת נקודת הפגישה של כל חוצי הזוויות ACB הנ"ל והוכח את תשובתך.



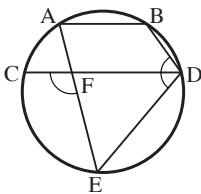
- 13) בציור נתון: $\widehat{AB} = \widehat{BC}$.
 א. הוכח עפ"י הציור שמתקיים $\alpha + \beta = \gamma$.
 (הנקודה המודגשת היא מרכז המעגל).
 ב. נתון שהמיתר AC שווה באורכו לרדיוס המעגל. הבע את γ באמצעות α .

14 במעגל נתונים שני מיתרים שונים היוצאים מאותה נקודה.

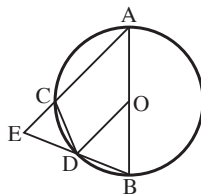
הוכח: המיתר שיוצא מהנקודה המשותפת של שני המיתרים וחוצה את הזווית שביניהם לא יכול להיות קוטר במעגל.



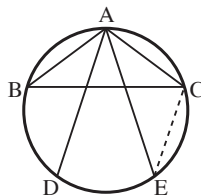
15 AB ו-AC הם מיתרים במעגל הנחתכים ע"י המיתר DE בנקודות F ו-G. נתון: הנקודה D היא אמצע הקשת AB והנקודה E היא אמצע הקשת AC. הוכח: המשולש AFG הוא שווה שוקיים.
ב. נתון: $AD = R$ (רדיוס המעגל), $\widehat{BC} = \widehat{CE}$. חשב את הזווית AFG.



16 AB ו-CD הם מיתרים המקבילים זה לזה. המיתר AE חותך את המיתר CD בנקודה F. הוכח: $\angle CFE = \angle BDE$.



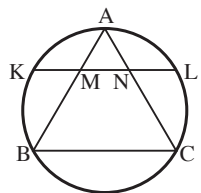
17 AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. AC הוא מיתר המקביל לרדיוס DO. המשכי BD ו-AC נפגשים בנקודה E. הוכח: א. $CD = ED$. ב. $\angle CDO = \angle BDO$.

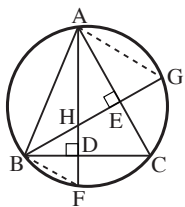


18 כל הנקודות שמסומנות בציור הן על המעגל. נתון: $\angle BAD = \angle CAE$, $AB = AC$. הוכח: $AD = AE$.
ב. נתון: $\angle DAE = \angle BAD$, $CE \parallel AD$. חשב את זווית המשולש ABC.

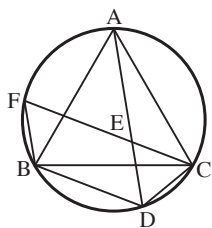
הערה: תרגילים 19–26 הם קצת יותר קשים מהרגיל.

19 ABC הוא משולש שווה צלעות החסום במעגל. הנקודות K ו-L הן אמצעי הקשתות AB ו-AC. המיתר KL חותך את הצלעות AC ו-AB בנקודות M ו-N. הוכח: א. $KL \parallel BC$. ב. המיתרים KL ו-BC נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל. ג. $KM = MN = NL$.

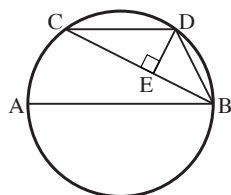




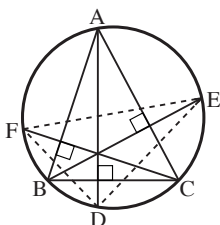
- (20)** המשולש ABC חסום במעגל. AD ו-BE הם גבהים במשולש שנחתכים בנקודה H שנמצאת בתוך המשולש. המשכי הגבהים חותכים את המעגל בנקודות F ו-G.
א. הוכח: $BH = BF$, $AH = AG$.
ב. שרטט בציור את הקטע CH והמשך אותו מהצד של H עד שיחתוך את המעגל בנקודה שתסומן ב-I. הוכח: $BF = BI$.



- (21)** ABC הוא משולש שווה צלעות החסום במעגל. D היא נקודה כלשהי על הקשת BC. המיתר CF מקביל למיתר BD וחותך את המיתר AD בנקודה E.
א. הוכח: המשולש DCE הוא שווה צלעות.
ב. המרובע FEDB הוא מקבילית.

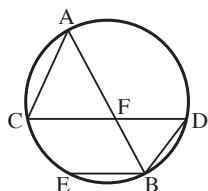


- (22)** AB הוא קוטר במעגל ו-CD הוא מיתר המקביל ל-AB. E היא נקודה על BC כך ש-DE ניצב ל-BC.
הוכח: $\angle BDE = 2\angle ABC$.



- (23)** המשולש ABC חסום במעגל. המשכי הגבהים של המשולש חותכים את המעגל בנקודות D, E ו-F.
א. נתון: $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle ABC = 70^\circ$.
חשב את זווית המשולש DEF.
ב. (ללא קשר לנתונים של סעיף א')
נסמן: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.
הוכח שזווית המשולש DEF הן: $180^\circ - 2\alpha$, $180^\circ - 2\beta$, $180^\circ - 2\gamma$.

- (24)** ABC הוא משולש החסום במעגל. BD ו-CE הם מיתרים החוצים בהתאמה את הזווית B ו-C. נתון: $BD = CE$.
הוכח: $AB = AC$ או $\angle BAC = 60^\circ$.
(הדרכה: ניתן לראות הדרכה בתשובה לתרגיל).



(25) AB הוא קוטר במעגל. CD ו-BE הם שני מיתרים המקבילים זה לזה.

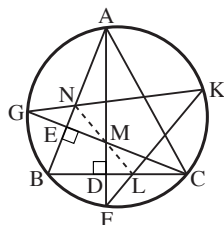
AB ו-CD נחתכים בנקודה F.

נתון: $\widehat{EB} = \widehat{BD}$.

הוכח:

א. המשולש ACF הוא שווה שוקיים.

ב. המרובע FDBE הוא מעוין.



(26) ABC הוא משולש חד זווית החסום במעגל. AD ו-CE הם גבהים במשולש ABC הנחתכים בנקודה M.

המשכי הגבהים חותכים את המעגל בנקודות F ו-G.

K היא נקודה כלשהי על הקשת AC. המיתר FK

חותך את הצלע BC בנקודה L והמיתר GK חותך את הצלע AC בנקודה N.

הוכח: הנקודות M, L ו-N נמצאות על ישר אחד.

(הדרכה: ניתן לראות הדרכה בתשובה לתרגיל).

תשובות (תרגילים לחזרה – זוויות במעגל):

(2) 22.5° (5) ב. $\frac{1}{3}$ (6) ב. AC צריך להיות קוטר. ג. 60° (9) ב. טרפזים שווים

שוקיים או מלבנים. (10) ב. 135° (11) ב. 75° (12) באמצע הקשת הקטנה BC.

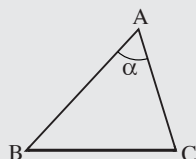
(13) ב. $2\alpha + 30^\circ$ (15) ב. 70° (18) ב. $108^\circ, 36^\circ, 36^\circ$ (23) א. $80^\circ, 40^\circ, 60^\circ$.

(24) הדרכה: למקרה השני ראה את תרגיל 7 שבעמ' 302. (26) הדרכה: היעזר בתרגיל 20

שבעמ' הקודם והוכח תחילה שמתקיים $FL = ML$, $GN = MN$.

נספח לפרק השמיני זווית ראייה של קטע נתון

בנספח זה נסביר בקיצור מהי זווית ראייה וכיצד בונים אותה.



הגדרה:

זווית ראייה – נתון קטע BC ונקודה A.

הזווית $\alpha = \angle BAC$ היא זווית הראייה

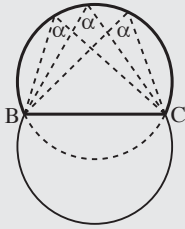
שבה רואים את הקטע BC מהנקודה A.

עפ"י המשפט הבא ניתן למצוא את כל הנקודות שמהן רואים קטע נתון בזווית ראייה

נתונה. (לא נוכיח את המשפט).

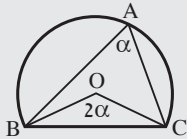
משפט:

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים קטע נתון בזווית ראייה נתונה מורכב משתי קשתות שוות שהן חלק משני מעגלים שווים כך שהקטע הנתון הוא מיתר במעגלים וזווית הראייה הנתונה היא זווית היקפית שהקודקוד שלה על אחת מהקשתות והיא נשענת על המיתר.



הערה:

משפט זה מאפשר לבנות את המקום הגיאומטרי כאשר נתונים הקטע וזווית הראייה. משרטטים את הקטע כמיתר ואחר כך עפ"י זווית הראייה הנתונה מוצאים את הזווית המרכזית המתאימה שהיא גדולה ממנה פי 2. לאחר מכן בונים משולש שווה שוקיים BOC שזווית הראש שלו ידועה ובסיסו BC נתון וכך מוצאים את מרכז המעגל O. לבסוף משרטטים את הקשת המתאימה. (בצורה דומה משרטטים את הקשת השנייה).



שים לב: אם זווית הראייה היא ישרה אז הקטע BC הוא קוטר.

פרק תשיעי

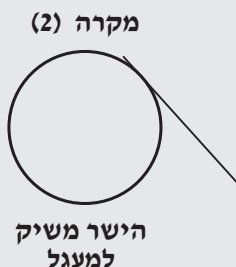
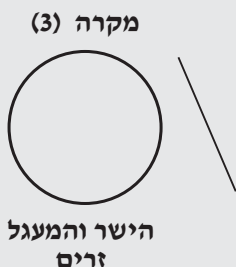
הנדסת המישור – המשיק למעגל

הגדרת המשיק

המצב ההדדי של ישר ומעגל

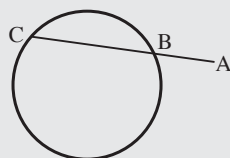
קיימות שלוש אפשרויות לגבי המצב ההדדי של ישר ומעגל:

- (1) לישר ולמעגל יש שתי נקודות משותפות. במקרה כזה הישר חותך את המעגל והוא נקרא חותך. (ראה ציור ימני למטה).
- (2) לישר ולמעגל יש נקודה אחת משותפת. במקרה כזה הישר נוגע במעגל והוא נקרא משיק למעגל. (ראה ציור אמצעי למטה).
- (3) לישר ולמעגל אין נקודות משותפות. במקרה כזה הישר לא חותך את המעגל ולא נוגע בו. הישר והמעגל נקראים זרים. (ראה ציור שמאלי למטה).



הערה:

כאשר רוצים לרשום שקטע או ישר הוא חותך למעגל אפשר לרשום זאת בעזרת שלוש אותיות.



לדוגמא בציור: הקטע ABC הוא חותך למעגל. A היא הנקודה מחוץ למעגל, B ו-C הן שתי נקודות החיתוך של החותך עם המעגל.

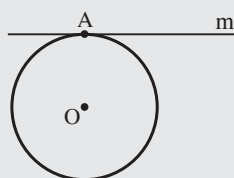
הגדרת המשיק

בפרק זה נדון בעיקר במשיק ולכן נביא שוב את ההגדרה.

הגדרה:

משיק למעגל – ישר שיש לו נקודה אחת ויחידה משותפת עם המעגל נקרא **משיק למעגל**.

הנקודה המשותפת נקראת נקודת ההשקה או נקודת המגע.



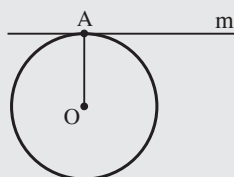
לדוגמא – הישר m **משיק למעגל** שמרכזו O בנקודה A . כלומר הוא נוגע במעגל בנקודה A . הנקודה A היא נקודת ההשקה או נקודת המגע.

זווית בין משיק לרדיוס

נתחיל עכשיו לדון בתכונות המשיק.

משפט:

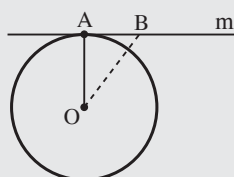
משיק למעגל מאונך לרדיוס הנפגש איתו בנקודת ההשקה.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח **בשפה מתמטית**:
מרכז המעגל הוא בנקודה O .

נתון: הישר m משיק למעגל בנקודה A .
צ"ל: $m \perp AO$.

הוכחה:

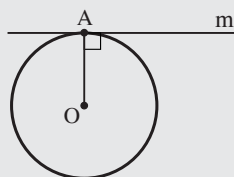


כל הנקודות שנמצאות על הישר m מלבד הנקודה A נמצאות **מחוץ למעגל**. לכן AO , שזהו רדיוס, הוא המרחק **הקצר ביותר** בין מרכז המעגל O לנקודה כלשהי שעל הישר m . מכאן ש- AO **מאונך** לישר m . אם AO לא מאונך לישר m אז יש על m נקודה אחרת, נניח B , כך ש- BO מאונך לישר m ואז $BO < AO$ וזה לא ייתכן.

מש"ל.

ננסה את המשפט ההפוך.

ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.



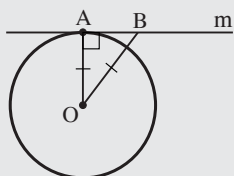
ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

מרכז המעגל הוא בנקודה O.

נתון: $m \perp AO$

צ"ל: הישר m משיק למעגל.

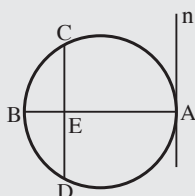
הוכחה:



נניח בשלילה שלישר m ולמעגל יש נקודה משותפת נוספת שנסמנה ב-B. במקרה כזה נקבל $AO = BO$ (כי שני הקטעים שווים לרדיוס המעגל). כלומר המשולש ABO הוא שווה שוקיים ולו זווית בסיס השווה ל- 90° .

($\angle OAB = 90^\circ$ עפ"י הנתון). דבר זה לא ייתכן ולכן לישר m ולמעגל אין נקודה נוספת משותפת פרט לנקודה A. כלומר הישר m משיק למעגל.

מש"ל.



דוגמא:

AB הוא קוטר במעגל ו-CD הוא מיתר

החותך אותו בנקודה E. הישר n משיק

למעגל בנקודה A. נתון: $CE = DE$.

הוכח: $CD \parallel n$.

פתרון:

הוכחה:

עפ"י הנתון הנקודה E היא אמצע המיתר CD. כמו כן AB הוא קוטר ולכן הוא עובר דרך מרכז המעגל. מכאן נקבל $CD \perp AB$ (קטע המחבר את מרכז המעגל עם האמצע של מיתר – מאונך למיתר).

נתון גם שהישר n משיק למעגל ולכן $n \perp AB$ (משיק למעגל מאונך לרדיוס הנפגש איתו בנקודת ההשקה).

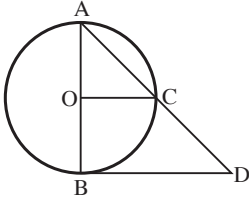
בסה"כ קיבלנו $CD \perp AB$ וגם $n \perp AB$ לכן $CD \parallel n$ (אם שני ישרים מאונכים כל אחד לישר שלישי אז הם מקבילים זה לזה).

מש"ל.

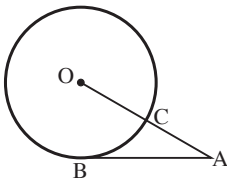
תרגילים (הגדרת המשיק)

הזווית בין משיק לרדיוס

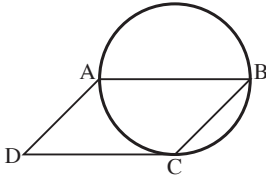
תרגילים יסודיים – הזווית בין משיק לרדיוס



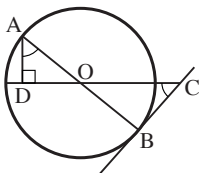
- (1) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. BD משיק למעגל בנקודה B. הקטע AD חותך את המעגל בנקודה C. נתון: $OC \parallel BD$.
א. חשב את זווית המשולש ABD.
ב. נסמן את E- את אמצע הקשת BC וב-F את החיתוך של המשך OE עם הקטע BD. הוכח שהמרובע OCDF הוא מקבילית.



- (2) הקטע AB משיק למעגל שמרכזו O בנקודה B והקטע AO חותך את המעגל בנקודה C. נתון: $AC = CO$.
חשב את הזווית BAO.

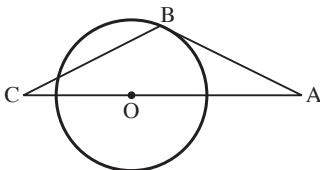


- (3) המרובע ABCD הוא מקבילית. הצלע AB היא קוטר והצלע DC משיקה למעגל בנקודה C. חשב את זווית המקבילית.

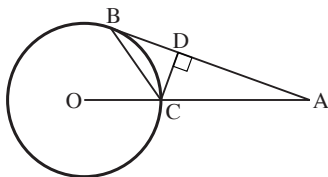


- (4) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. BC משיק למעגל בנקודה B. AD ניצב להמשך הקטע CO. א. הוכח: $\angle A = \angle C$.
ב. האם המשולשים ADO ו-CBO חופפים? נמק.

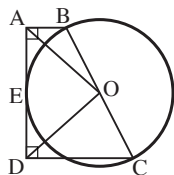
תרגילים נוספים – הזווית בין משיק לרדיוס



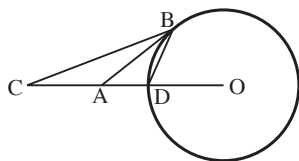
- (5) AB משיק למעגל שמרכזו O בנקודה B. הקטע AC עובר דרך המרכז O. הוכח:
א. $AB < AO$.
ב. $CO < BC$.



- 6) AB משיק למעגל שמרכזו O בנקודה B.
 הקטע AO חותך את המעגל בנקודה C.
 CD הוא אנך למשיק AB.
 א. הוכח: המיתר BC חוצה את הזווית DCO.
 ב. נתון: $\angle CBD + \angle A = 55^\circ$. חשב את הזווית A.



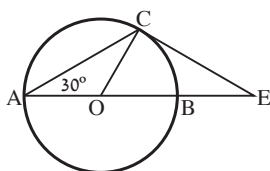
- 7) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$).
 השוק AD משיקה למעגל שמרכזו O בנקודה E.
 והשוק BC היא קוטר במעגל.
 א. הוכח: $AO = DO$.
 ב. הוכח: $AB + DC = BC$.



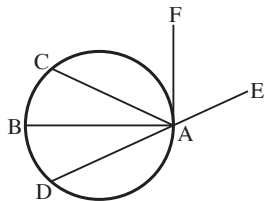
- 8) AB משיק למעגל שמרכזו O בנקודה B. הקטע AO חותך את המעגל בנקודה D. הנקודה C נמצאת על המשך AO כך שמתקיים: $AB = AC$.
 א. הוכח: $\angle CBD = 45^\circ$.
 ב. נתון: AB חוצה את הזווית CBD. הוכח: $AB = BO$.

- 9) מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצא משיק למעגל הנוגע בו בנקודה B. הנקודה C היא אמצע הקטע AO. נתון: $\angle A = \alpha$.
 א. הבע את הזווית BCO באמצעות α . (נמק את תשובתך).
 ב. מצא את גודל הזווית α עבורה הנקודה C נמצאת על המעגל.
 ג. מצא לאילו ערכי α הנקודה C נמצאת: (הוכח את תשובתך)
 (1) מחוץ למעגל. (2) בתוך המעגל.

ישר המאונך לרדיוסו בקצהו



- 10) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. הנקודה C נמצאת על המעגל והנקודה E נמצאת על המשך AB. נתון: $\angle A = 30^\circ$, $BO = BE$.
 הוכח: CE משיק למעגל בנקודה C.



- 11) AB הוא קוטר במעגל. AC ו-AD הם מיתרים במעגל השווים זה לזה.
 הנקודה E נמצאת על המשך AD.
 נתון: AF חוצה את הזווית CAE.
 הוכח: AF משיק למעגל בנקודה A.

תשובות (הגדרת המשיק):

- 1 א. $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ (3) $135^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 45^\circ$ (6) ב. 20° (9) א. 2α ב. 30° .
ג. (1) $0^\circ < \alpha < 30^\circ$ (2) $30^\circ < \alpha < 90^\circ$.

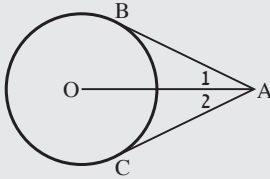
שני משיקים למעגל

נדרן עכשיו בשני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שמחוץ למעגל.

משפט:

- (א) שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
(ב) הקטע המחבר את מרכז המעגל עם הנקודה שממנה יוצאים שני המשיקים חוצה את הזווית שבין המשיקים.

ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:



מרכז המעגל הוא בנקודה O.

נתון: AB משיק למעגל בנקודה B.

AC משיק למעגל בנקודה C.

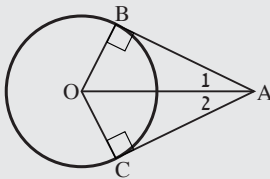
צ"ל: א. $AB = AC$

ב. $\angle A_1 = \angle A_2$

הוכחה:

כדי להוכיח את המשפט נעביר את הרדיוסים BO ו-CO.

עכשיו נחפוף את המשולשים ABO ו-ACO.



$$\left. \begin{array}{l} AO = AO \text{ (צלע משותפת)} \\ BO = CO \text{ (רדיוסים במעגל)} \\ \angle B = \angle C = 90^\circ \text{ (משיק למעגל מאונך לרדיוס)} \end{array} \right\}$$

הנפגש איתנו בנקודת ההשקה

$\Downarrow$

$$\Delta ABO \cong \Delta ACO \text{ (עפ"י צ.צ.ז.)}$$

$\Downarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \text{א. } AB = AC \text{ (צלעות מתאימות במשולשים חופפים)} \\ \text{ב. } \angle A_1 = \angle A_2 \text{ (זוויות מתאימות במשולשים חופפים)} \end{array} \right\}$$

מש"ל.

הערה:

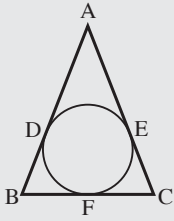
מההוכחה נובע גם השוויון הבא $\angle AOB = \angle AOC$. נוסף לכך, אם נעביר את המיתר BC

אז קל לראות ש-AO מאונך למיתר BC, חוצה אותו וחוצה את הקשת BC.

כמו כן מתקיים $\angle ABC = \angle ACB$.

הדוגמא הבאה מתייחסת למעגל חסום במשולש. (ראה עמ' 345).

דוגמא א':

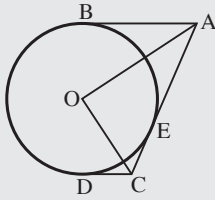


המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
צלעות המשולש משיקות למעגל בנקודות D, E ו-F.
(המעגל חסום במשולש).
נתון: $AE = 5$ ס"מ, $CE = 3$ ס"מ.
חשב את היקף המשולש ABC.

פתרון:

עפ"י הנתון והמשפט האחרון (סעיף א') מתקיים: $AD = AE = 5$ ס"מ, $CE = CF = 3$ ס"מ.
 $BD = BF$. כמו כן $AC = AE + CE = 5 + 3 = 8$ ס"מ ולכן $AB = 8$ ס"מ. מכאן נקבל
 $BC = BF + CF = 3 + 3 = 6$ ס"מ. לכן גם $BD = AB - AD = 8 - 5 = 3$ ס"מ.
בסה"כ קיבלנו $AB = AC = 8$ ס"מ, $BC = 6$ ס"מ.
כלומר היקף המשולש ABC הוא $8 + 8 + 6 = 22$ ס"מ.

דוגמא ב':



AB, AC ו-CD משיקים למעגל שמרכזו O.
בנקודות B, E ו-D בהתאמה.
נתון: $AB \parallel CD$.
הוכח: $\angle AOC = 90^\circ$.

פתרון:

הוכחה:

$$\left. \begin{array}{l} \angle BAE + \angle ECD = 180^\circ \quad (\text{זוויות חד צדדיות בין מקבילים, } AB \parallel CD) \\ \angle EAO = \frac{1}{2} \angle BAE \quad (\text{AO חוצה את זווית BAE עפ"י המשפט האחרון (סעיף ב')}) \\ \angle ECO = \frac{1}{2} \angle ECD \quad (\text{CO חוצה את זווית ECD עפ"י המשפט האחרון (סעיף ב')}) \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

$$\angle EAO + \angle ECO = \frac{1}{2} \angle BAE + \frac{1}{2} \angle ECD = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

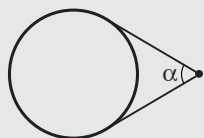
$\Downarrow$

$$\angle AOC = 90^\circ \quad (\text{עפ"י סכום הזוויות במשולש AOC})$$

מש"ל.

זווית ראייה של מעגל

בהסתמך על הזווית שבין שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה שמחוץ למעגל נגדיר:



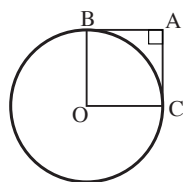
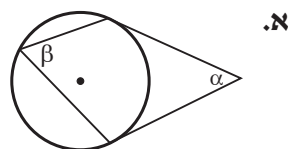
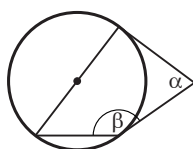
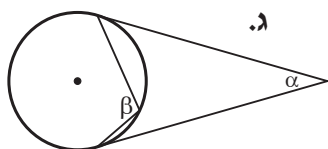
זווית ראייה של מעגל – הזווית שבין שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה מחוץ למעגל היא זווית הראייה שבה רואים את המעגל מהנקודה.

תרגילים (שני משיקים למעגל)

שוויון המשיקים

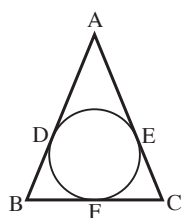
תרגילים יסודיים – שוויון המשיקים

- (1) בתרגילים הבאים נתונים שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה. הבע את הזווית β באמצעות הזווית α : (הנקודה המודגשת היא מרכז המעגל)

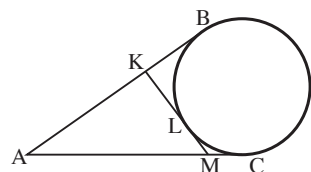


- (2) AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-C. שני המשיקים מאונכים זה לזה.

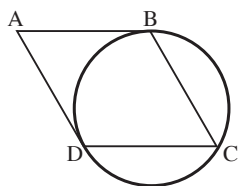
קבע איזה מרובע הוא המרובע ABOC והוכח את תשובתך.



- (3) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
צלעות המשולש משיקות למעגל בנקודות D, E ו-F.
א. הוכח שהנקודה F היא אמצע הבסיס BC.
ב. נתון ששוק המשולש היא b והיקף המשולש הוא p. הבע באמצעות b ו-p את הקטע AD.

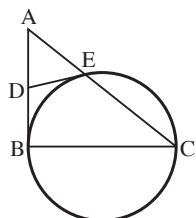


- (4) AB ו-AC משיקים למעגל בנקודות B ו-C. הנקודה K נמצאת על AB והנקודה M נמצאת על AC כך שהקטע KM משיק למעגל בנקודה L. נתון: $AK = a$, $KM \perp AB$ ורדיוס המעגל הוא R. הבע את היקף המשולש AKM בעזרת a ו-R. נמק.

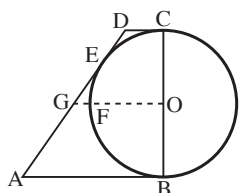


- 5) המרובע ABCD הוא מקבילית שצלעותיה AB ו-AD נוגעות במעגל בנקודות B ו-D בהתאמה. (הקודקוד C על המעגל).
א. הוכח: המקבילית היא מעוין.
ב. חשב את זווית המעוין.

תרגילים נוספים – שוויון המשיקים

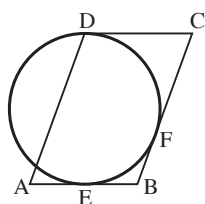


- 6) BC הוא קוטר במעגל. AB מאונך ל-BC. הנקודה D נמצאת על AB כך שהקטע DE משיק למעגל בנקודה E. הנקודות A, E, C נמצאות על ישר אחד.
א. הוכח: הנקודה D היא אמצע הקטע AB.
ב. הוכח: $\angle ADE = 2\angle C$.



- 7) BC הוא קוטר במעגל שמרכזו O. שלוש מצלעות המרובע ABCD משיקות למעגל בנקודות B, C ו-E. ($\angle A < 90^\circ$). הנקודה G היא על הצלע AD והקטע GO חותך את המעגל בנקודה F. נתון: $GO \parallel AB$.
א. הוכח שהמרובע ABCD הוא טרפז ושהקטע GO הוא קטע האמצעים.

ב. נתון: $1 \text{ ס"מ} = GF$ והיקף הטרפז ABCD הוא 34 ס"מ . חשב את רדיוס המעגל.

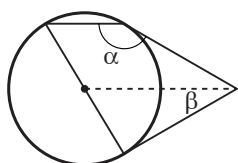


- 8) המרובע ABCD הוא מקבילית שצלעותיה AB, BC ו-CD משיקות למעגל בנקודות E, F ו-D בהתאמה. נתון: $AE = a$, $AD = b$.
א. הבע את היקף המקבילית באמצעות a ו-b.
ב. נסמן ב-M את נקודת החיתוך של אלכסוני המקבילית. נתון שהיקף המשולש BMC גדול ב-7 ס"מ מהיקף המשולש BMA. כמו כן נתון שהיקף המקבילית הוא 62 ס"מ . מצא את a ו-b.

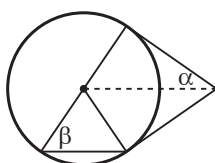
חציית הזווית שבין המשיקים

תרגילים יסודיים – חציית הזווית שבין המשיקים

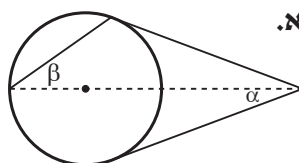
- 9) בציורים הבאים נתונים שני משיקים למעגל. הבע את הזווית β באמצעות הזווית α :
(הנקודה המודגשת היא מרכז המעגל)



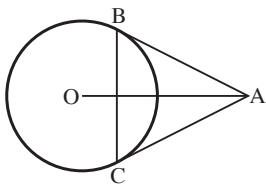
א.



ב.



א.



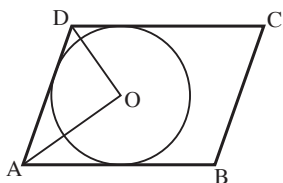
10 AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O
בנקודות B ו-C.

הוכח:

א. הקטע AO חוצה את המיתר BC ומאונך לו.

ב. הקטע AO חוצה את הקשת BC.

תרגילים נוספים – חציית הזווית שבין המשיקים



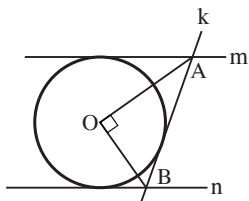
11 המרובע ABCD הוא מקבילית ששלוש מצלעותיה

נוגעות במעגל שמרכזו O.

א. הוכח: $\angle AOD = 90^\circ$.

ב. נסמן E-את נקודת ההשקה של הצלע AD.

הוכח: $\angle DOE = \angle OAB$.



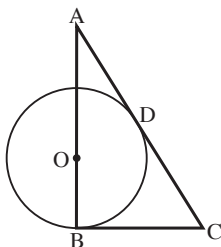
12 הישרים k, m ו-n משיקים למעגל שמרכזו O.

הישר k חותך את הישרים m ו-n בנקודות

A ו-B בהתאמה. נתון: $\angle AOB = 90^\circ$.

א. הוכח: $m \parallel n$.

ב. נסמן ב-C את אמצע AB. הוכח: $OC \parallel n$.



13 הצלע AB של המשולש ABC עוברת

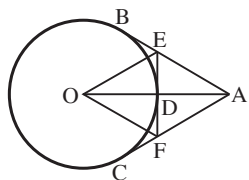
דרך מרכז המעגל O. הצלע AC משיקה

למעגל בנקודה D והצלע BC משיקה

למעגל בנקודה B. נתון: $\angle A = 30^\circ$.

א. הוכח: (1) $AD = CD$ (2) $AO = CO$.

ב. חשב את היחס: $\frac{OB}{AB}$.

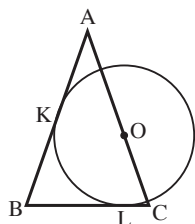


14 AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-C

בהתאמה. הקטע AO חותך את המעגל בנקודה D. הקטע EF

משיק למעגל בנקודה D. נתון שהמרובע AEOF הוא מעוין.

חשב את הזווית שבין המשיקים AB ו-AC.



15 הצלע AC של משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$)

עוברת דרך מרכז המעגל O. הצלע AB משיקה למעגל

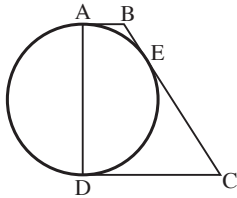
בנקודה K והצלע BC משיקה למעגל בנקודה L.

נתון שהנקודה K היא אמצע הצלע AB.

א. חשב את זווית המשולש ABC.

ב. נתון: $BL = m$, $LC = n$.

הבע באמצעות m ו-n את היקף המשולש ABC.



- 16 AD הוא קוטר במעגל. הצלעות AB, BC ו-CD של המרובע ABCD משיקות למעגל בנקודות A, E ו-D בהתאמה. ($\angle C < 90^\circ$).
א. הוכח שהמרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית.
ב. נתון: $\angle C = 60^\circ$. חשב באיזה יחס מחלקת הנקודה E את השוק BC.

תשובות (שני משיקים למעגל):

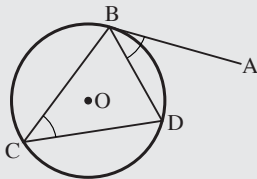
- 1 א. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ ב. $180^\circ - \frac{\alpha}{2}$ ג. $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ 3 ב. $2b - \frac{p}{2}$ 4 $2a + 2R$
7 ב. 5 ס"מ. 8 א. $a + 3b$ ב. 5 ס"מ, 19 ס"מ. 9 א. $45^\circ - \frac{\alpha}{2}$
ב. $90^\circ - \alpha$ ג. $180^\circ - \alpha$ 13 ב. $\frac{1}{3}$ 15 א. $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$ ב. $5m + n$
16 ב. $BE : EC = 1 : 3$

זווית בין משיק למיתר

ננסח ונוכיח משפט נוסף.

משפט:

הזווית בין משיק למיתר במעגל הנפגשים בנקודת ההשקה שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר (מצידו השני).



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:
מרכז המעגל הוא בנקודה O.

נתון: AB משיק למעגל בנקודה B.

BD הוא מיתר במעגל והזווית BCD היא

זווית היקפית הנשענת על המיתר BD.

צ"ל: $\angle ABD = \angle BCD$

הוכחה:

כדי להוכיח את המשפט נעביר קוטר BE

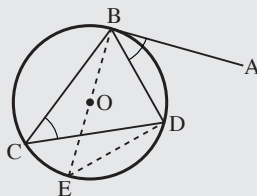
ואת המיתר DE. הזווית BCD ו-BED

נשענות על אותה הקשת BD ולכן הן שוות

זו לזו, כלומר $\angle BCD = \angle BED$. מכאן

שמספיק להוכיח שמתקיים $\angle ABD = \angle BED$

נוכיח זאת:



נסתכל במשולש BDE: הזווית BDE היא זווית ישרה כי היא נשענת על הקוטר BE.
 לכן $\angle DBE = 90^\circ - \angle BED$.

הזווית ABE היא זווית ישרה כי היא זווית בין משיק לרדיוס הנפגשים בנקודת ההשקה.
 לכן $\angle ABD = 90^\circ - \angle DBE = 90^\circ - (90^\circ - \angle BED) = \angle BED$
 כלומר קיבלנו $\angle ABD = \angle BED$ ולכן $\angle ABD = \angle BCD$.

מש"ל.

הערות:

(א) היות זווית היקפית שווה למחצית מהזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת נובל לנסח:

הזווית בין משיק למיתר במעגל הנפגשים בנקודת ההשקה שווה למחצית מהזווית המרכזית הנשענת על המיתר ולמחצית הקשת המתאימה למיתר.

בסימונים של המשפט הקודם המשמעות היא: $\angle ABD = \frac{1}{2} \angle BOD$ וכן $\angle ABD = \frac{1}{2} \widehat{BD}$.

(ב) גם המשפט ההפוך למשפט האחרון נכון. (ראה בספר הנדסה חלק ב' תרגיל 13 בעמ' 274).

דוגמא א':

מהנקודה A יוצא משיק למעגל

בנקודה B וחותרך ACD.

נתון: $AB = DB$

הוכח: $AC = BC$

פתרון:

הוכחה:

עפ"י הנתון $AB = DB$ ולכן $\angle A = \angle D$. הזווית ABC היא הזווית שבין המשיק AB למיתר BC ולכן היא שווה, עפ"י המשפט האחרון, לזווית D שהיא זווית היקפית הנשענת על המיתר BC, כלומר $\angle ABC = \angle D$. משני השוויונות שקיבלנו נקבל $\angle A = \angle ABC$ ולכן $AC = BC$.

מש"ל.

דוגמא ב':

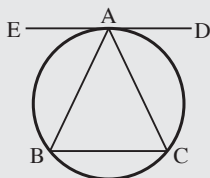
DE משיק למעגל בנקודה A.

הנקודות B ו-C נמצאות על המעגל.

נתון: $DE \parallel BC$

הוכח: $AB = AC$

פתרון:



הוכחה:

$\angle DAC = \angle ACB$
 $\angle DAC = \angle ABC$

(זוויות מתחלפות בין מקבילים, $DE \parallel BC$)
 (זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר)

$\Downarrow$

$\angle ACB = \angle ABC$

(שתי זוויות השוות לזווית שלישית – שוות זו לזו)

$\Downarrow$

$AB = AC$

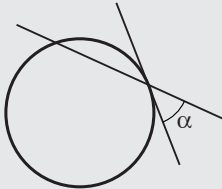
(מול זוויות שוות במשולש נמצאות צלעות שוות)

מש"ל.

הזווית שבין ישר למעגל

נגדיר מהי הזווית שבין ישר למעגל בתנאי שהישר חותך את המעגל.

הגדרה:



הזווית שבין ישר למעגל – הזווית (החדה) שבין הישר לבין המשיק למעגל בנקודת החיתוך נקראת הזווית שבין הישר למעגל.

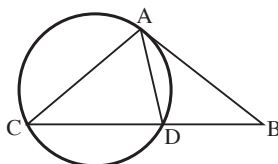
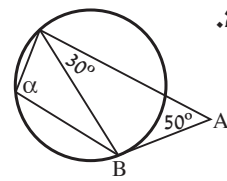
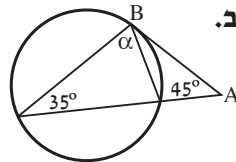
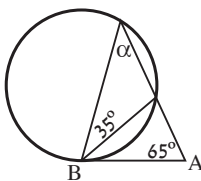
הערה: עפ"י ההגדרה הזווית שבין ישר העובר דרך המרכז למעגל היא 90° והזווית שבין משיק למעגל היא 0° .

תרגילים

(זווית בין משיק למיתר)

תרגילים יסודיים – זווית בין משיק למיתר

1) בצירים הבאים הקטע AB משיק למעגל בנקודה B. מצא את הזווית α :



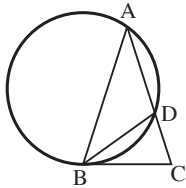
מהנקודה B יוצא משיק למעגל בנקודה

A וחוצה BDC. נתון: $AD = BD$.

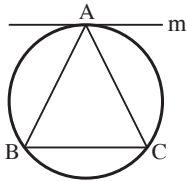
א. הוכח: המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

ב. נתון: $\angle ADC = \alpha$.

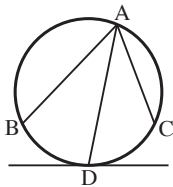
הבע את הזווית CAD בעזרת α .



3. ABC הוא משולש שווה שוקיים שבו $AB = AC$.
 הקודקוד A נמצא על המעגל והצלע BC
 משיקה למעגל בנקודה B. הצלע AC חותכת
 את המעגל בנקודה D. נתון: BD חוצה את
 הזווית ABC.
 חשב את זווית המשולש ABC.



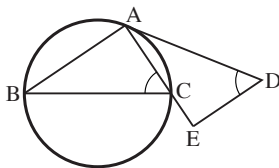
4. ABC הוא משולש החסום במעגל.
 הישר m משיק למעגל בנקודה A.
 א. נתון: $AB = AC$. הוכח:
 הבסיס BC מקביל לישר m.
 ב. הוכח את הטענה ההפוכה לזו
 שבסעיף א'.



5. AB, AD ו-AC הם מיתרים במעגל. דרך
 הנקודה D עובר משיק למעגל.
 א. נתון: AD חוצה את הזווית שבין המיתרים
 AB ו-AC. הוכח: המשיק בנקודה D
 מקביל למיתר BC.
 ב. הוכח את הטענה ההפוכה לזו שבסעיף א'.

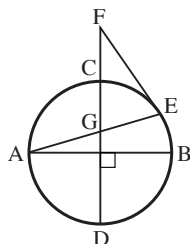
6. BC הוא מיתר במעגל שמרכזו O. D היא נקודה על הקשת הקטנה BC כך שהרדיוס
 OD מאונך למיתר BC. המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך OD מהצד של D
 בנקודה A.
 הוכח: המיתר BD חוצה את הזווית ABC.

תרגילים נוספים – זווית בין משיק למיתר

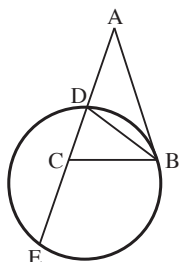


7. AD משיק למעגל בנקודה A. BC הוא קוטר.
 הנקודה E נמצאת על המשך המיתר AC.
 נתון: $AD = BC$, $\angle ACB = \angle D$.
 א. הוכח: $AB \parallel DE$, $AB = AE$, $AE \perp DE$.
 ב. חשב את הזווית ABE.

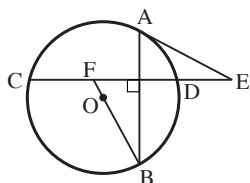
8. m ו-n הם שני ישרים המקבילים זה לזה שמשקים למעגל.
 הוכח: המיתר המחבר את נקודות ההשקה הוא קוטר.



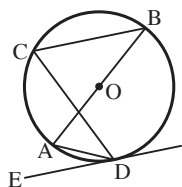
- 9) AB ו-CD הם קטרים במעגל המאונכים זה לזה.
 FE משיק למעגל בנקודה E. הנקודה F נמצאת
 על המשך CD. AE חותך את CD בנקודה G.
 א. הוכח: $FG = FE$.
 ב. נתון: $\angle BAG + \angle GFE = 54^\circ$.
 חשב את הזווית GFE.



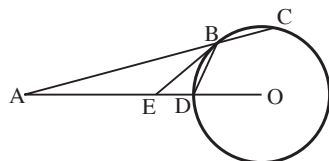
- 10) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
 השוק AB משיקה למעגל בנקודה B. השוק AC
 חותכת את המעגל בנקודה D והמשכה חותך את
 המעגל בנקודה E. BD הוא חוצה זווית הבסיס
 במשולש ABC.
 א. הוכח: $BC = CE$.
 ב. נתון: $\angle ADB = 105^\circ$. חשב את הזווית CBE.



- 11) AB ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O
 המאונכים זה לזה. הנקודה E נמצאת על
 המשך CD. הנקודה F היא החיתוך של
 המשך BO עם CD. נתון ש-AE משיק
 למעגל בנקודה A.
 הוכח: $\angle BAE = \angle BFE$.



- 12) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. CD הוא
 מיתר במעגל. DE משיק למעגל בנקודה D.
 א. הוכח: $\angle C + \angle ADE = 90^\circ$.
 ב. נתון: $\angle B = 40^\circ$, $BC \parallel DE$.
 חשב את הזווית ADE.



- 13) BC ו-BD הם מיתרים במעגל שמרכזו O
 השווים זה לזה. המשך BC והמשך DO
 נחתכים בנקודה A. הנקודה E נמצאת על
 AO כך ש-BE משיק למעגל בנקודה B.
 א. הוכח: BE חוצה את הזווית ABD.
 ב. נתון: $\angle A = 15^\circ$. חשב את הזווית BED.

תשובות (זווית בין משיק למיתר):

- 1) א. 100° . ב. 65° . ג. 40° . 2) ב. $180^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. 7) ב. 45° . 9) ב. 36° . 10) ב. 35° .
 12) ב. 25° . 13) ב. 40° .

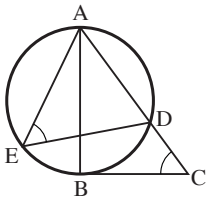
תרגילים לחזרה – המשיק למעגל

סיכום המושגים העיקריים של הפרק התשיעי:

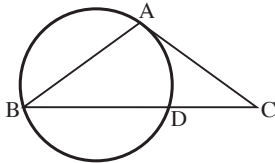
משיק למעגל – ישר שיש לו נקודה אחת ויחידה משותפת עם המעגל. הנקודה המשותפת נקראת נקודת ההשקה או נקודת המגע.
משפט – משיק למעגל מאונך לרדיוס בקצהו ולהיפך.
משפט – שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
משפט – הקטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה יוצאים שני משיקים למעגל חוצה את הזווית שבין המשיקים, מאונך למיתר המחבר את נקודות ההשקה, חוצה אותו וחוצה את הקשת המתאימה.
משפט – הזווית בין משיק למיתר במעגל הנפגשים בנקודת ההשקה שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר (מצידו השני).

תרגילים

(תרגילים לחזרה – המשיק למעגל)



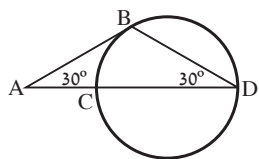
- (1) AB הוא קוטר במעגל. BC מאונך ל-AB. AC חותך את המעגל בנקודה D. E היא נקודה על המעגל (ראה ציור).
 א. הוכח: $\angle C = \angle E$.
 ב. נתון: $\widehat{AE} = \widehat{DE}$. נסמן: $\angle EAD = \alpha$.
 הבע באמצעות α את הזווית BAC ומצא עפ"י התשובה את התחום בו צריכה להיות α כדי שיהיה פתרון לבעיה.



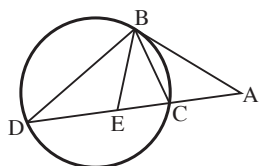
- (2) AB הוא מיתר במעגל. AC משיק למעגל בנקודה A. המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
 הצלע BC חותכת את המעגל בנקודה D.
 נתון: $AB = DB$.
 חשב את זווית המשולש ABC.

- (3) AB הוא מיתר במעגל. דרך A עובר משיק למעגל. הנקודה C היא אמצע הקשת AB הקטנה.

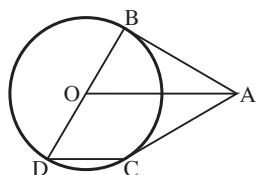
הוכח: הנקודה C נמצאת במרחקים שווים מהמיתר AB ומהמשיק הנ"ל.



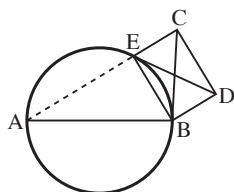
- 10** מנקודה A הנמצאת מחוץ למעגל יוצאים משיק AB המשיק למעגל בנקודה B וחותר ACD. נתון: $\angle A = \angle D = 30^\circ$.
הוכח: א. CD הוא קוטר במעגל.
ב. BC שווה לרדיוס המעגל.
ג. AD גדול פי 3 מרדיוס המעגל.



- 11** מהנקודה A יוצאים משיק למעגל בנקודה B וחותר ACD. הנקודה E נמצאת על DC כך ש- BE חוצה את הזווית DBC.
א. הוכח: $AB = AE$.
ב. נתון: $BE = BC$. הוכח: $\angle EBC = \angle BAC$.
ג. נתון: $\angle D = \alpha$. הבע באמצעות α את הזווית A.

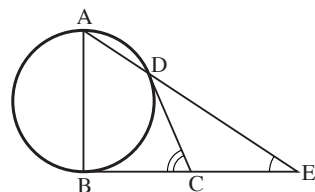


- 12** AB ו- AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו- C. BD הוא קוטר.
א. הוכח: $DC \parallel AO$.
ב. מה צריך להיות גודל הזווית שבין המשיקים AB ו- AC כדי שהמרובע AODC יהיה מקבילית? האם המקבילית במקרה זה היא מעוין? נמק.

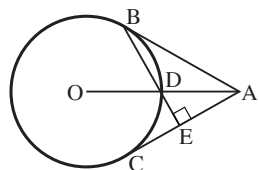


- 13** AB הוא קוטר במעגל. המרובע BDCE הוא מלבן. האלכסון DE משיק למעגל בנקודה E.
הוכח:
א. הנקודות A, E ו- C נמצאות על ישר אחד.
ב. האלכסון BC משיק למעגל בנקודה B.

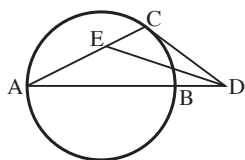
הערה: תרגילים 14 – 18 הם קצת יותר קשים מהרגיל.



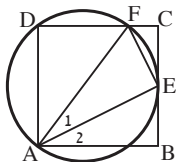
- 14** AB הוא קוטר במעגל. CB ו- CD משיקים למעגל בנקודות B ו- D. המשכי AD ו- CB נפגשים בנקודה E.
הוכח: $\angle DCB = 2\angle E$.



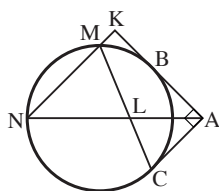
- 15** AB ו- AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו- C בהתאמה. הקטע AO חותך את המעגל בנקודה D. המשך המיתר BD חותך את המשיק AC בנקודה E. נתון: $BE \perp AC$.
חשב את הזווית שבין שני המשיקים.



- 16) AB הוא קוטר במעגל. המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשיך AB בנקודה D. הנקודה E נמצאת על המיתר AC. נתון: DE חוצה את הזווית ADC. הוכח: $\angle CED = 45^\circ$.



- 17) ABCD הוא ריבוע. דרך הקודקים A ו-D עובר מעגל שנוגע בצלע BC בנקודה E וחותר את הצלע DC בנקודה F. הוכח: א. $\angle AEF = 90^\circ$. ב. $\angle A_1 = \angle A_2$. (ראה את סימון הזוויות בציור). ג. $CE = BE$.



- 18) AC ו-AK משיקים למעגל בנקודות B ו-C. AN עובר דרך מרכז המעגל. NK חותר את המעגל בנקודה M. MC חותר את AN בנקודה L. נתון: $AB \perp AC$, $NK \parallel AC$. א. חשב את זווית המשולש NML. ב. הוכח: הקטע AL שווה לרדיוס המעגל.

תשובות (תרגילים לחזרה – המשיק למעגל):

- 1) ב. $2\alpha - 90^\circ$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$. 2) 108° , 36° , 36° . 5) 80° , 60° , 40° . 6) א. 35° .
 ב. 36° . 7) א. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. 8) א. $\frac{a+b}{2}$. ב. 27 ס"מ, 11 ס"מ. 11) ג. $60^\circ - \frac{2}{3}\alpha$.
 12) ב. 90° , לא. 15) 60° . 18) א. 45° , 67.5° , 67.5° .

פרק עשירי

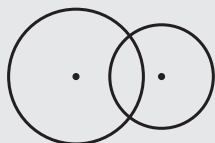
הנדסת המישור – שני מעגלים

מעגלים חותכים ומעגלים זרים

המצב ההדדי של שני מעגלים

נדון תחילה במצב ההדדי של שני מעגלים. קיימות שלוש אפשרויות.

הגדרות:



(א) שני מעגלים שיש להם שתי נקודות משותפות נקראים מעגלים חותכים.

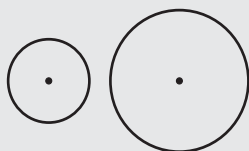
(ב) שני מעגלים שאין להם אף נקודה משותפת נקראים מעגלים זרים.

(1) אם מעגל אחד נמצא בתוך השני הם נקראים מעגלים פנימיים. (ראה ציור ימני למטה).

(2) אם לשני המעגלים יש מרכז משותף הם נקראים מעגלים מרכזיים. (ראה ציור אמצעי למטה).

(3) אם מעגל אחד נמצא מחוץ לשני הם נקראים מעגלים חיצוניים. (ראה ציור שמאלי למטה).

(3) מעגלים חיצוניים



(2) מעגלים מרכזיים



(1) מעגלים פנימיים

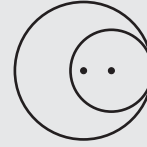


(ג) שני מעגלים שיש להם נקודה אחת משותפת נקראים מעגלים משיקים. הנקודה נקראת נקודת ההשקה או המגע.

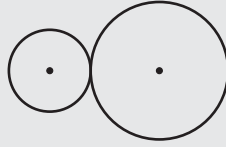
(1) אם מעגל אחד נמצא בתוך השני הם נקראים משיקים מבפנים. (ראה ציור ימני בתחילת העמוד הבא).

(2) אם מעגל אחד נמצא מחוץ לשני הם נקראים משיקים מבחוץ. (ראה ציור שמאלי בתחילת העמוד הבא).

(1) מעגלים משיקים מבפנים



(2) מעגלים משיקים מבחוץ



הערה: שני מעגלים בעלי רדיוסים שווים נקראים מעגלים שווים.

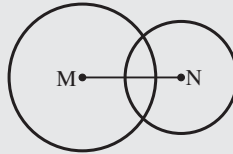
קטע המרכזים

הגדרה:

קטע המרכזים – הקטע המחבר את מרכזי שני המעגלים נקרא קטע המרכזים.

אם נסמן את רדיוס המעגל הגדול ב- R , את רדיוס המעגל הקטן ב- r ואת מרכזי המעגלים ב- M ו- N נקבל לגבי קטע המרכזים MN את האפשרויות הבאות: (לא נוכיח אותן)

(א) מעגלים חותכים:



$$R - r < MN < R + r$$

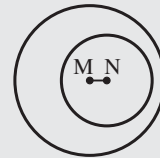
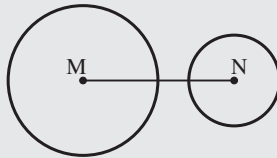
(ב) מעגלים זרים:

מעגלים פנימיים:

$$MN < R - r$$

מעגלים חיצוניים:

$$MN > R + r$$



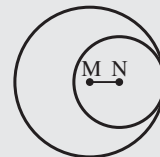
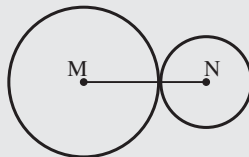
(ג) מעגלים משיקים:

משיקים מבפנים:

$$MN = R - r$$

משיקים מבחוץ:

$$MN = R + r$$



מעגלים חותכים ומעגלים זרים

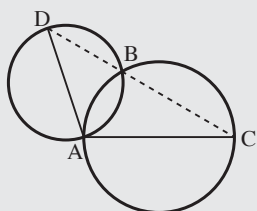
עד לסוף סעיף זה נדון רק במעגלים חותכים וזרים. בסעיף הבא נדון במעגלים משיקים. ננסח את המשפט המתייחס לקטע המרכזים של מעגלים חותכים.

משפט:

קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, או המשכו, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

הערה: להוכחת המשפט (למקרה הראשון) ראה תרגיל 3 בעמ' הבא.

דוגמא:



שני המעגלים שבציור נחתכים בנקודות A ו-B.

AC הוא קוטר במעגל הגדול ו-AD הוא קוטר במעגל הקטן.

הוכח: הנקודות C, B ו-D נמצאות על ישר אחד.

פתרון:

כדי להוכיח את הטענה נעביר את המיתר AB.

הוכחה:

$$\left. \begin{array}{l} \angle ABC = 90^\circ \text{ (זווית היקפית הנשענת על הקוטר AC במעגל הגדול)} \\ \angle ABD = 90^\circ \text{ (זווית היקפית הנשענת על הקוטר AD במעגל הקטן)} \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

$$\angle DBC = \angle ABC + \angle ABD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

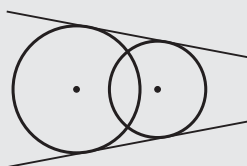
$\Downarrow$

הנקודות B, C ו-D נמצאות על ישר אחד (כי הזווית BDC היא זווית שטוחה)

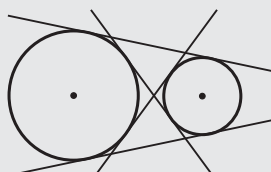
מש"ל.

משיקים למעגלים חותכים וזרים

נסכם את האפשרויות לגבי משיקים משותפים:



(א) לשני מעגלים נחתכים יש שני משיקים משותפים.



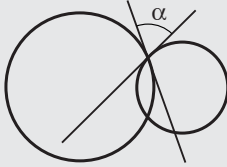
(ב) למעגלים פנימיים ומרכזיים אין משיקים משותפים.

(ג) לשני מעגלים חיצוניים יש ארבעה משיקים משותפים.

הזווית שבין שני מעגלים

בדומה לזווית שבין ישר למעגל (ראה עמ' 320) ניתן להגדיר זווית בין שני מעגלים נחתכים.

הגדרה:



הזווית שבין שני מעגלים נחתכים – הזווית (החדה) שבין המשיקים למעגלים בנקודת חיתוך שלהם נקראת הזווית שבין שני המעגלים.

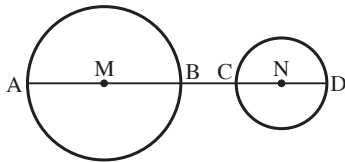
תרגילים

(מעגלים חותכים ומעגלים זרים)

המצב ההדדי של שני מעגלים

- (1) הרדיוסים של שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N הם: $R = 7$ ס"מ, $r = 3$ ס"מ. מצא את המצב ההדדי של המעגלים אם קטע המרכזים MN (בס"מ) הוא:

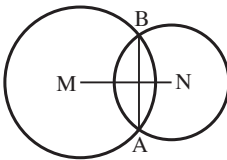
א. 4 ב. 10 ג. 5 ד. 14 ה. 2



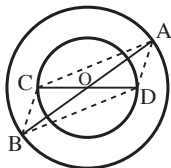
- (2) מרכזי המעגלים הם בנקודות M ו-N. AB ו-CD הם קטרים במעגלים. (כל הנקודות שבציורים נמצאות על הקטע AD). נתון: $BC = 5$ ס"מ, $AD = 27$ ס"מ. חשב את אורך קטע המרכזים MN.

הגדרת המעגל, מיתרים ומרחקיהם מהמרכז (מעגלים חותכים וזרים)

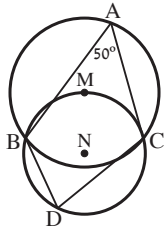
תרגילים יסודיים – הגדרת המעגל, מיתרים (מעגלים חותכים וזרים)



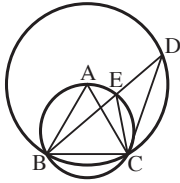
- (3) שני המעגלים בציור שמרכזיהם M ו-N חותכים זה את זה בנקודות A ו-B. הוכח: קטע המרכזים MN חוצה את המיתר המשותף AB ומאונך לו.



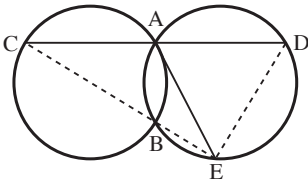
- (4) AB ו-CD הם בהתאמה קטרים בשני מעגלים מרכזיים שונים שמרכזם O. א. הוכח: המרובע ADBC הוא מקבילית. ב. האם ייתכן שהמרובע הני"ל הוא מלבן? נמק. ג. האם ייתכן שהמרובע הני"ל הוא מעוין? נמק.



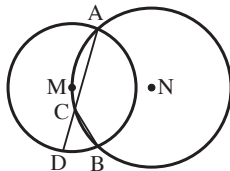
- 10** הנקודה M היא מרכז המעגל הגדול והיא נמצאת על המעגל הקטן שמרכזו N. שני המעגלים נחתכים בנקודות B ו-C. A היא נקודה על המעגל שמרכזו M ו-D היא נקודה על המעגל שמרכזו N. נתון: $\angle BAC = 50^\circ$.
חשב את הזווית BDC.



- 11** ABC הוא משולש שחסום במעגל הקטן. הנקודה A היא מרכז המעגל הגדול. שני המעגלים נחתכים בנקודות B ו-C. BD הוא מיתר במעגל הגדול והוא חותך את המעגל הקטן בנקודה E. הוכח: א. $\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BEC$.
ב. CE = DE.



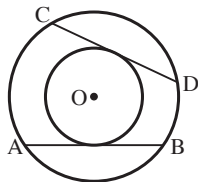
- 12** שני מעגלים בעלי רדיוסים שווים נחתכים בנקודות A ו-B. AC הוא מיתר במעגל השמאלי שהמשכו חותך את המעגל הימני בנקודה D. E היא נקודה על המעגל הימני כך שהנקודות C, B ו-E נמצאות על ישר אחד. א. הוכח: AC = AE.
ב. נתון שהמיתר BC הוא קוטר במעגל השמאלי. הוכח: AC = AD.
ג. הוכח: $\angle CED = 90^\circ$.



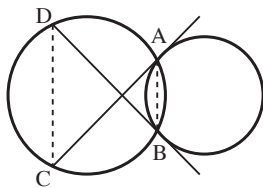
- 13** שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N נחתכים בנקודות A ו-B כך שהמעגל שמרכזו N עובר דרך הנקודה M. AC הוא מיתר במעגל הימני והמשכו חותך את המעגל השמאלי בנקודה D. הוכח: CD = CB.

המשיק למעגל (מעגלים חותכים וזרים)

תרגילים יסודיים – המשיק למעגל (מעגלים חותכים וזרים)

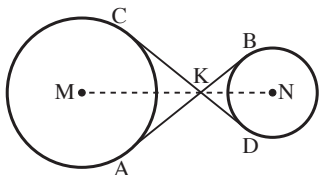


- 14** שני המעגלים שבציור הם בעלי מרכז משותף O. AB ו-CD הם מיתרים במעגל הגדול המשיקים למעגל הקטן. הוכח: AB = CD.

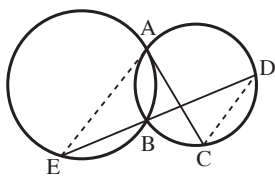


- 15 שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B.
 המשיקים למעגל הימני בנקודות
 A ו-B חותכים את המעגל השמאלי
 גם בנקודות C ו-D.
 הוכח: $CD \parallel AB$.

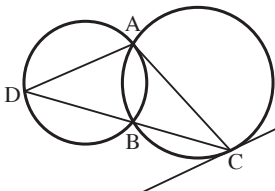
תרגילים נוספים – המשיק למעגל (מעגלים חותכים וזרים)



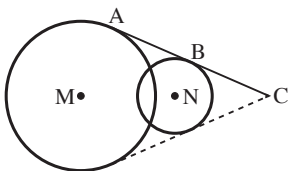
- 16 AB ו-CD הם משיקים לשני מעגלים שונים שמרכזיהם
 M ו-N בנקודות A, B, C ו-D.
 א. הוכח: $AB = CD$.
 ב. הוכח שקטע המרכזים (הקטע MN) עובר דרך
 הנקודה K שהיא נקודת החיתוך של שני המשיקים.
 ג. הוכח שהמרובע ADBC הוא טרפז שווה שוקיים.



- 17 שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. AC הוא מיתר
 במעגל הימני והוא משיק בנקודה A למעגל השמאלי.
 דרך הנקודה B עובר ישר החותך את המעגלים
 בנקודות D ו-E.
 א. הוכח: $AE \parallel CD$.
 ב. במרובע ADCE נסמן ב-M את נקודת החיתוך
 של חוצה הזווית EAD עם חוצה הזווית ADC. מה גודל הזווית AMD? נמק.

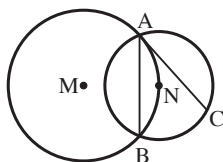


- 18 שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. דרך A עובר
 משיק למעגל השמאלי שחותך את המעגל הימני
 בנקודה C. המשך המיתר BC חותך את המעגל
 השמאלי גם בנקודה D.
 א. הוכח: המשיק למעגל הימני בנקודה C מקביל
 למיתר AD.
 ב. המשך הקטע AB חותך את המשיק למעגל הימני בנקודה E. נתון: $DB = BC$.
 הוכח: $AC = DE$.



- 19 AB הוא משיק משותף לשני מעגלים שמרכזיהם M ו-N.
 הקוטר של המעגל שמרכזו M הוא 10 ס"מ, הקוטר
 של המעגל שמרכזו N הוא 5 ס"מ וקטע המרכזים
 הוא 7 ס"מ MN . המשיק המשותף השני נפגש עם
 המשיק AB בנקודה C.
 חשב את הקטע CN.

- (20) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N נחתכים בנקודות A ו-B. המשיק למעגל שמרכזו M בנקודה B חותך את המעגל שמרכזו N גם בנקודה C. המשיך המיתר AC חותך את המעגל שמרכזו M גם בנקודה D. המשיק למעגל שמרכזו N בנקודה A חותך את המיתר BD בנקודה E. הוכח: $AE = DE$.



- (21) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N נחתכים בנקודות A ו-B. הנקודה N נמצאת על המעגל שמרכזו M. המשיק בנקודה A למעגל שמרכזו M חותך את המעגל שמרכזו N גם בנקודה C. הוכח: $AB = AC$.

תשובות (מעגלים חותכים ומעגלים זרים):

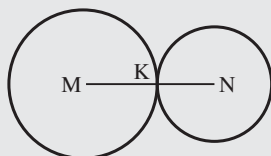
- 1) א. משיקים פנימיים. ב. משיקים חיצוניים. ג. חותכים. ד. זרים חיצוניים.
ה. זרים פנימיים. 2) 16 ס"מ. 4) ב. לא. ג. כן. 5) 35° . 8) ב. שהמעגלים יהיו בעלי רדיוסים שווים. 9) ב. 30° , 105° . 10) 80° . 19) 7 ס"מ.

מעגלים משיקים

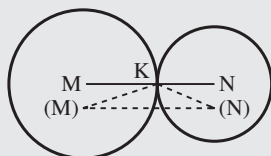
קטע המרכזים של מעגלים משיקים נדרון עכשיו במעגלים משיקים.

משפט:

נקודת ההשקה של שני מעגלים משיקים נמצאת על קטע המרכזים אם המעגלים משיקים מבחוץ או על המשכו אם המעגלים משיקים מבפנים.



- ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:
(לגבי השקה מבחוץ)
נתון: שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N המשיקים זה לזה בנקודה K.
צ"ל: הנקודות M, N ו-K נמצאות על ישר אחד.
הוכחה:



- נוכיח בשלילה. אם הנקודות M, N ו-K אינן על ישר אחד אז מתקבל משולש MNK. מצד אחד, בהסתמך על כך שסכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית נקבל שמתקיים $MN < MK + KN$.

מצד שני, אם נסתכל על הקטע המקווקו בין (M) ל-(N) נראה שהוא גדול מסכום הרדיוסים (חלקו עובר מחוץ למעגלים). כלומר $MN > MK + KN$ וזאת **סתירה**.
לכן לא קיים משולש MNK וכל שלוש הנקודות M, N ו-K נמצאות על ישר אחד.
מש"ל.

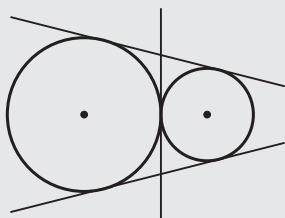
הערה: ההוכחה דומה כאשר המעגלים משיקים מבפנים.

משיקים למעגלים משיקים

נסכם את האפשרויות לגבי **משיקים משותפים**: (ראה תרגיל 3 בעמ' הבא)



(א) לשני מעגלים המשיקים מבפנים יש משיק אחד משותף העובר דרך נקודת המגע של שני המעגלים.



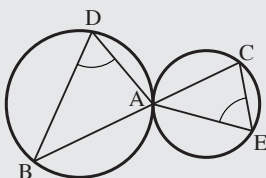
(ב) לשני מעגלים המשיקים מבחוץ יש שלושה משיקים משותפים. אחד מהם עובר דרך נקודת המגע של שני המעגלים.

דוגמא:

נתונים שני מעגלים המשיקים מבחוץ בנקודה A.
B ו-C הן נקודות על המעגלים כך שהקטע BC עובר דרך A. D ו-E נקודות על המעגלים.
הוכח: $\angle ADB = \angle AEC$.

פתרון:

הוכחה:

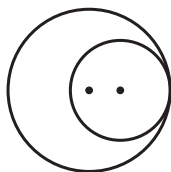


נעביר דרך הנקודה A את המשיק המשותף לשני המעגלים ונסמנו ב-GH. בהסתמך על כך שהזווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר נקבל: $\angle BAG = \angle ADB$ וכן $\angle CAH = \angle AEC$.
נוסף לכך $\angle BAG = \angle CAH$ כזוויות קודקודיות ולכן $\angle ADB = \angle AEC$.

מש"ל.

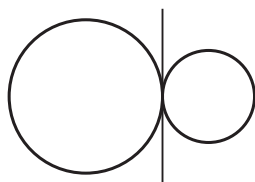
תרגילים (מעגלים משיקים)

תרגילים יסודיים – מעגלים משיקים

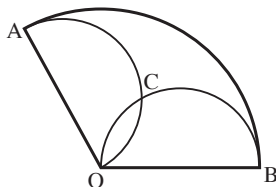


- (1) שני המעגלים שבציור משיקים מבפנים. רדיוס המעגל הגדול הוא 5 ס"מ וקוטר המעגל הקטן הוא 6 ס"מ.
א. מהו אורך קטע המרכזים?
ב. מה יהיה אורך קטע המרכזים אם המעגלים ישיקו מבחוץ?

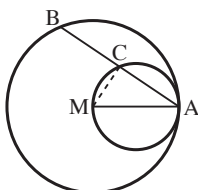
- (2) כאשר שני מעגלים משיקים מבחוץ קטע המרכזים הוא 22 ס"מ וכאשר הם משיקים מבפנים קטע המרכזים הוא 8 ס"מ.
א. מצא את הרדיוסים של שני המעגלים.
ב. האם מרכז המעגל הגדול נמצא בתוך המעגל הקטן או מחוץ למעגל הקטן כאשר המעגלים משיקים מבפנים? שרטט והסבר.



- (3) א. נתונים שני מעגלים המשיקים מבחוץ. הוכח: ישר העובר דרך נקודת המגע ומשיק לאחד משני המעגלים – משיק גם למעגל השני.
(הדרכה: הסתמך על כך שקטע המרכזים עובר דרך נקודת המגע של שני המעגלים).
ב. הוכח את הטענה הנ"ל כאשר שני המעגלים משיקים מבפנים.



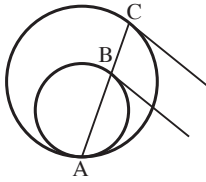
- (4) על כל אחד מהרדיוסים AO ו-BO של גזירת מעגל בנו חצי מעגל. הקשתות של שני חצאי המעגלים נחתכות בנקודה C.
א. הוכח: הנקודות A, C ו-B נמצאות על ישר אחד.
ב. המשך הקטע OC חותך את הקשת של גזירת המעגל בנקודה D.
(1) איזה מרובע הוא המרובע AOB? נמק את תשובתך.
(2) נתון שהמרובע AOB הוא מעוין. חשב את הזווית המרכזית של הגזירה ($\angle AOB$).



- (5) שני המעגלים שבציור משיקים מבפנים בנקודה A. הנקודה M היא מרכז המעגל הגדול. AM הוא קוטר במעגל הקטן. המיתר AB שבמעגל הגדול חותך את המעגל הקטן בנקודה C.
הוכח: א. $MC \perp AB$
ב. $BC = AC$

תרגילים נוספים – מעגלים משיקים

6) שני מעגלים שבציור משיקים מבפנים בנקודה A.



AB הוא מיתר במעגל הקטן והמשכו חותך את

המעגל הגדול בנקודה C.

א. הוכח: המשיק למעגל הקטן בנקודה B והמשיק

למעגל הגדול בנקודה C מקבילים זה לזה.

ב. הוכח את הטענה שבסעיף א' למקרה שהמעגלים

משיקים מבחוץ בנקודה A.

7) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N משיקים מבחוץ בנקודה K. דרך K עוברים שני ישרים AB ו-CD שחותכים את המעגל M בנקודות A ו-C ואת המעגל N בנקודות B ו-D.

B ו-D.

הוכח: $AC \parallel BD$.

8) שני מעגלים משיקים מבפנים בנקודה A.

AB הוא מיתר במעגל הגדול שחותך את

המעגל הקטן בנקודה M. המיתר AC

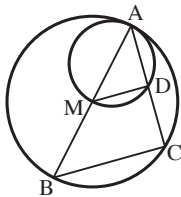
חותך את המעגל הקטן בנקודה D.

א. הוכח: $MD \parallel BC$.

ב. נתון שהנקודה M היא מרכז המעגל הגדול.

(1) הוכח ש-AM הוא קוטר במעגל הקטן.

(2) הוכח: $MD = \frac{1}{2} BC$.



9) שני מעגלים משיקים מבחוץ בנקודה C. AB הוא

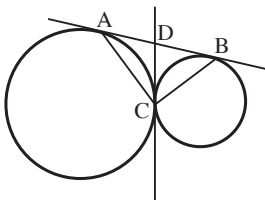
משיק משותף למעגלים בנקודות A ו-B בהתאמה.

המשיק המשותף למעגלים בנקודה C חותך את AB

בנקודה D.

הוכח: א. $AD = BD$.

ב. $\angle ACB = 90^\circ$.



10) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N משיקים מבחוץ

בנקודה D. AD הוא המשיק המשותף למעגלים

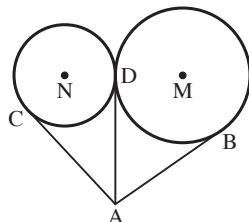
בנקודה D, AB משיק למעגל שמרכזו M בנקודה

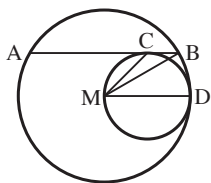
B ו-AC משיק למעגל שמרכזו N בנקודה C.

א. הוכח: $AB = AC$.

ב. נתון: $\angle BAC = 100^\circ$. חשב את הזווית MAN.

ג. חשב את הזווית BDC.





11) שני מעגלים נוגעים זה בזה מבפנים בנקודה D.

MD הוא רדיוס במעגל הגדול והוא קוטר

במעגל הקטן. AB הוא מיתר במעגל הגדול

והוא משיק למעגל הקטן בנקודה C.

נתון: $AB \parallel MD$.

מצא את זווית המשולש BCM.

תשובות (מעגלים משיקים):

1) א. 2 ס"מ. ב. 8 ס"מ. 2) א. 15 ס"מ, 7 ס"מ. ב. מחוץ למעגל. 4) ב. (1) דלתון.

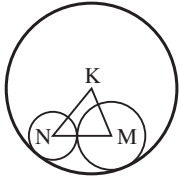
(2) 120°. 10) ב. 50°. ג. 130°. 11) 135°, 15°, 30°.

תרגילים לחזרה – שני מעגלים

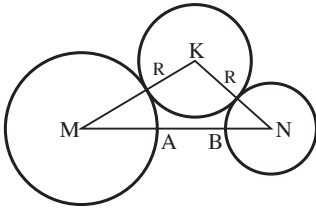
סיכום המושגים העיקריים של הפרק העשירי:

מעגלים חותכים – מעגלים שיש להם שתי נקודות משותפות.
מעגלים זרים – מעגלים שאין להם אף נקודה משותפת.
מעגלים פנימיים – מעגלים זרים שאחד נמצא בתוך השני.
מעגלים מרכזיים – מעגלים שיש להם מרכז משותף.
מעגלים חיצוניים – מעגלים זרים שאחד נמצא מחוץ לשני.
מעגלים משיקים – מעגלים שיש להם נקודה אחת משותפת.
מעגלים משיקים מבפנים – מעגלים משיקים שאחד נמצא בתוך השני.
מעגלים משיקים מבחוץ – מעגלים משיקים שאחד נמצא מחוץ לשני.
קטע המרכזים – הקטע המחבר את מרכזי המעגלים.
משפט – קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, או המשכו, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.
משפט – נקודת ההשקה של שני מעגלים משיקים נמצאת על קטע המרכזים אם המעגלים משיקים מבחוץ או על המשכו אם המעגלים משיקים מבפנים.

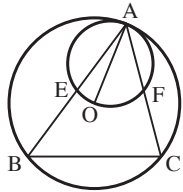
תרגילים (תרגילים לחזרה – שני מעגלים)



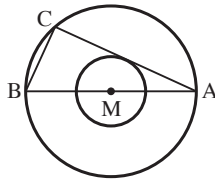
- (1) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N משיקים זה לזה מבחוץ ומשיקים מבפנים למעגל הגדול שמרכזו K. א. נתון שהיקף המשולש KMN הוא p. הבע את רדיוס המעגל הגדול בעזרת p. ב. האם היקף המשולש הנ"ל תלוי ברדיוסים של שני המעגלים הקטנים? נמק.



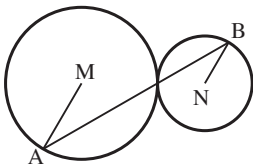
- (2) נתונים שני מעגלים חיצוניים שמרכזיהם M ו-N ומעגל שלישי שמרכזו K, רדיוסו R והוא משיק מבחוץ לשני המעגלים הנ"ל כמתואר בציור. קטע המרכזים MN חותך את המעגלים החיצוניים בנקודות A ו-B. נסמן: $AB = a$. א. הוכח: $a < 2R$. ב. כיצד ייראה הציור אם $a = 2R$? הסבר.



- (3) ABC הוא משולש החסום במעגל שמרכזו O. על AO כקוטר בנו מעגל נוסף שחותך את AB ו-AC בנקודות E ו-F. א. הוכח: הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי הצלעות AB ו-AC. ב. נתון: $EF = FC$. הוכח: הנקודות O, C, E נמצאות על ישר אחד.



- (4) שני המעגלים שבציור הם מעגלים מרכזיים בעלי מרכז משותף M. AB הוא קוטר במעגל הגדול. המיתר AC שבמעגל הגדול משיק למעגל הקטן. א. הוכח: אורך המיתר BC שווה לקוטר המעגל הקטן. ב. מהנקודה A מעבירים משיק נוסף למעגל הקטן וגם מהנקודה C מעבירים משיק נוסף למעגל הקטן. שני המשיקים נפגשים בנקודה D. הוכח: המשולש ACD הוא שווה שוקיים.



- (5) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N משיקים מבחוץ. A ו-B הן נקודות על המעגלים כך שהקטע AB עובר דרך נקודת המגע. הוכח: $AM \parallel BN$.

6) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N נחתכים

בנקודות A ו-B. מעגל שלישי עובר דרך

הנקודות M, A, N ו-B.

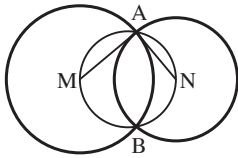
א. הוכח: MN הוא קוטר במעגל השלישי.

ב. הוכח: שני המעגלים שמרכזיהם M ו-N

נחתכים בזווית ישרה. (ראה עמ' 330).

(הערה: עליך להוכיח תחילה ש-AM ו-AN

הם משיקים).



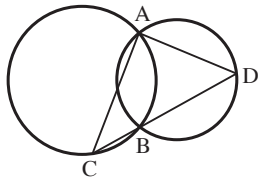
7) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. ישר כלשהו

עובר דרך B וחותך את המעגלים בנקודות C ו-D.

הוכח: הזווית CAD איננה תלויה במיקומן של

הנקודות C ו-D והיא **קבועה** לכל הישרים שעוברים

דרך B.



8) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. AC ו-BD

הם מיתרים במעגל הגדול שהמשיכהם חותכים

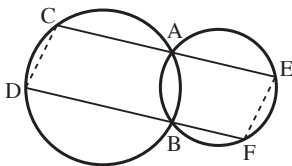
את המעגל הקטן גם בנקודות E ו-F בהתאמה.

נתון: $CE \parallel DF$.

א. הוכח: המרובע CEFD הוא מקבילית.

ב. מה ניתן לומר על המרובע CEFD אם AD

הוא קוטר?



9) שני מעגלים בעלי רדיוסים שווים נוגעים זה בזה

בנקודה A. דרך A עוברים שני ישרים החותכים

את המעגלים בנקודות B, C, D ו-E.

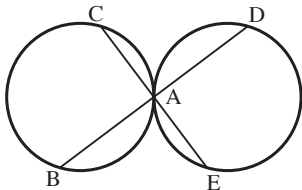
א. הוכח: המרובע BCDE הוא מקבילית.

ב. דרך הנקודות A, B ו-E מעבירים מעגל שלישי.

נתון ש-BE הוא קוטר של המעגל השלישי.

(1) איזה מרובע הוא המרובע BCDE במקרה כזה? הוכח את תשובתך.

(2) הוכח: רדיוס המעגל השלישי שווה לרדיוס של שני המעגלים המשיקים.



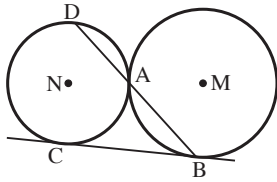
10) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. משיק משותף, מהצד של A, נוגע במעגל אחד

בנקודה C ובמעגל השני בנקודה D. המשיך AC חותך את המיתר BD בנקודה E

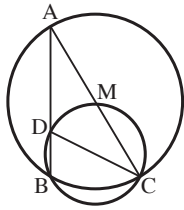
והמשיך AD חותך את המיתר BC בנקודה F.

הוכח: $\angle AEB + \angle AFB = 180^\circ$.

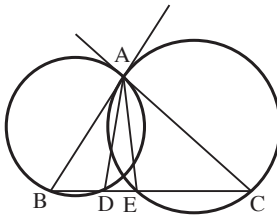
הערה: תרגילים 11–14 הם קצת יותר קשים מהרגיל.



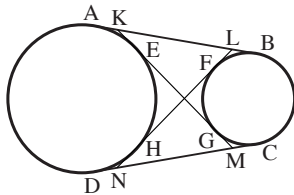
- 11** שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N משיקים מבחוץ בנקודה A. BC הוא משיק משותף למעגלים. המשיך המיתר AB חותך את המעגל שמרכזו N גם בנקודה D. הוכח: הנקודות C, N, D נמצאות על ישר אחד.



- 12** שני מעגלים נחתכים בנקודות B ו-C. המעגל הקטן עובר דרך הנקודה M שהיא מרכז המעגל הגדול. המשיך CM חותך את המעגל הגדול בנקודה A. AB חותך את המעגל הקטן בנקודה D. א. הוכח: CD הוא קוטר במעגל הקטן. ב. הוכח: $AD = CD$. ג. סמן ב-N את מרכז המעגל הקטן. הוכח: $MN \parallel AB$.



- 13** A היא אחת מנקודות החיתוך של שני מעגלים. AB הוא מיתר במעגל השמאלי והוא משיק בנקודה A למעגל הימני. AC הוא מיתר במעגל הימני והוא משיק בנקודה A למעגל השמאלי. הקטע BC חותך את המעגלים בנקודות D ו-E. הוכח: $AD = AE$. **(הדרכה: ניתן לראות הדרכה בתשובה לתרגיל).**



- 14** העבירו את ארבעת המשיקים המשותפים לשני מעגלים חיצוניים. נקודות ההשקה הן A, B, C, D, E, F, G ו-H. הנקודות K, L, M, N הן נקודות חיתוך של המשיקים. הוכח: א. $AK = LB$. ב. $KL = EG$.

תשובות (תרגילים לחזרה – שני מעגלים):

- 1** א. $\frac{p}{2}$. ב. לא. **2** ב. הנקודה K תהיה על AB. **8** ב. המרובע הוא מלבן. **9** ב. **(1) מעוין.** **13 הדרכה:** הוכח: $\angle ADE = \angle BAC$ וגם $\angle AED = \angle BAC$.

פרק אחד עשר

הנדסת המישור –

מעגל חוסם ומעגל חסום

מעגל חוסם משולש

בפרק זה נדון במעגל החוסם מצולעים ובמעגל החסום במצולעים. נתחיל עם משולש. נזכיר את ההגדרה של מעגל החוסם משולש.

הגדרה:

מעגל חוסם משולש – המעגל שעובר דרך שלושת קודקודיו של משולש נתון נקרא המעגל החוסם את המשולש.

הערות:

- (א) המשולש נקרא משולש החסום במעגל.
- (ב) כפי שראינו כבר בעמ' 263, לכל משולש נתון קיים מעגל אחד ויחיד החוסם אותו.
- אמנם פתרנו כבר הרבה תרגילים עם מעגל החוסם משולש, אבל כאן הדגש יהיה על **מרכז המעגל החוסם**. נזכיר את המשפט העיקרי.

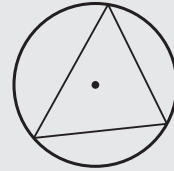
משפט:

מרכז המעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים לצלעות המשולש.

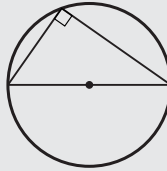
הערות:

- (א) במשולש חד זווית מרכז המעגל החוסם נמצא בתוך המשולש ולהיפך. (ראה ציור ימני בתחילת העמ' הבא).
- (ב) במשולש ישר זווית מרכז המעגל החוסם נמצא באמצע היתר ולהיפך. (ראה ציור אמצעי בתחילת העמ' הבא).
- (ג) במשולש קהה זווית מרכז המעגל החוסם נמצא מחוץ למשולש להיפך. (ראה ציור שמאלי בתחילת העמ' הבא).

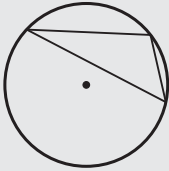
(1) משולש חד זווית



(2) משולש ישר זווית



(3) משולש קהה זווית

**דוגמא:**

המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש.

נתון: $\angle CBO = 2\angle ABO$.

חשב את זוויות המשולש ABC.

פתרון:

בבעיות מסוג זה כדאי בדרך כלל לשרטט את המעגל החוסם את המשולש ולהיעזר בתכונות המעגל הידועות.

נשרטט, אם כן, את המעגל החוסם את המשולש ונעביר את הרדיוסים AO ו-BO.

מתקיים $AO = BO = CO$ (כי כולם רדיוסים).

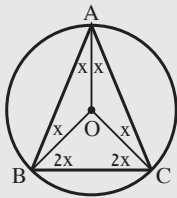
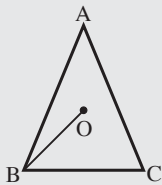
נסמן $\angle ABO = x$ ואז שאר הזוויות הן כפי

שמשומן בציור. (המשולשים AOB, AOC ו-BOC הם כולם שווים שוקיים).

המשוואה שנקבל היא $x + x + 2x + 2x + x + x = 180^\circ$. כלומר $8x = 180^\circ$

ולכן $x = 22.5^\circ$. מכאן $2x = 45^\circ$. לכן זוויות המשולש הן: $45^\circ, 67.5^\circ, 67.5^\circ$.

הערה: תרגילים על מפגש האנכים האמצעיים לצלעות המשולש ראה גם בספר מתמטיקה חלק א'.

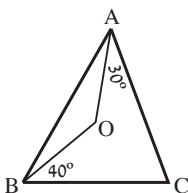


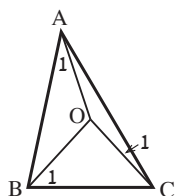
תרגילים (מעגל חוסם משולש)

תרגילים יסודיים – מעגל חוסם משולש

(1) הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

מצא עפ"י הנתונים בציור את זוויות המשולש ABC.





(2) הנקודה O היא מרכז המעגל

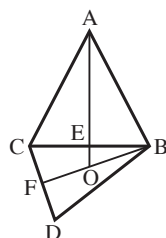
החוסם את המשולש ABC.

נתון: $\angle ABC = 80^\circ$,

$\angle ACB = 60^\circ$.

חשב את הזוויות A_1 , B_1 ו- C_1 .

(ראה את סימון הזוויות בציור).



(3) המשולשים ABC ו-BCD הם שוי שוקיים

($AB = AC$, $BC = BD$). AE הוא חוצה

הזווית A ו-BF הוא הגובה לצלע CD.

המשך AE ו-BF נפגשים בנקודה O.

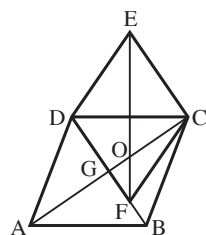
הוכח: $BO = DO$.

(4) O היא נקודה על היתר AB של משולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) כך שמתקיים

$BO = CO$.

הוכח: הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

תרגילים נוספים – מעגל חוסם משולש



(5) המרובעים ABCD ו-DECF הם מעוינים. (הנקודה F

נמצאת על BD). הנקודה O היא החיתוך של EF ו-AC.

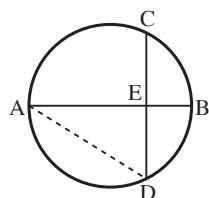
א. הוכח: הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את

המשולש BDC.

ב. מצא את המשולש שהנקודה F היא מרכז המעגל

החוסם אותו.

ג. היכן נמצא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABG? הסבר.

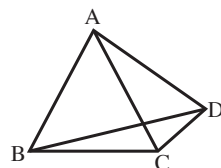


(6) AB הוא קוטר במעגל ו-CD הוא מיתר

שנחצה ע"י AB בנקודה E.

הוכח: המיתר AD משיק למעגל שחוסם

את המשולש BED.



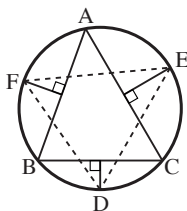
(7) בציור נתון: $AB = AC = AD$.

הוכח:

א. הנקודה A היא מרכז המעגל

החוסם את המשולש BDC.

ב. $\angle BAC = 2\angle BDC$.



8) המשולש ABC חסום במעגל. מחוץ למשולש

העלו אנכים אמצעיים לצלעות המשולש

שחותכים את המעגל בנקודות D, E ו-F.

א. נתון: $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$.

חשב את זווית המשולש DEF.

ב. (ללא קשר לנתונים של סעיף א')

נסמן: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

הוכח שזווית המשולש DEF הן: $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $90^\circ - \frac{\beta}{2}$, $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

9) שלושת הגבהים במשולש ABC נחתכים בנקודה O שבתוך המשולש.

הוכח: הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המשולשים AOB, AOC ו-BOC שווים

זה לזה ושווים לרדיוס המעגל שחוסם את המשולש ABC.

(הדרכה: ניתן לראות הדרכה בתשובה לתרגיל).

תשובות (מעגל חוסם משולש):

1) 50° , 60° , 70° 2) 30° , 50° , 10° 5) ב. ADC ג. באמצע AB 8) א. 65° , 55° , 60° .

9) הדרכה: מצא בכל מקרה מיתר המשותף לשני מעגלים והוכח שהזווית ההיקפית הנשענות

עליו בשני המעגלים שוות.

מעגל חסום במשולש

נעבור לדון במעגל החסום במשולש.

הגדרה:

מעגל חסום במשולש – המעגל שלושת צלעותיו של משולש נתון משיקות לו נקרא המעגל החסום במשולש.

הערות:

א) המשולש נקרא משולש החוסם מעגל.

ב) כפי שנראה במשפט הבא קיים מעגל אחד ויחיד החסום במשולש נתון.

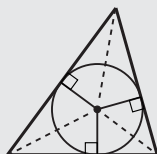
ג) מרכז המעגל החסום במשולש נמצא תמיד בתוך המשולש.

ד) במשולש שווה צלעות מרכז המעגל החוסם והחסום מתלכדים. ראה תרגיל 8 בעמ' 348.

כמו בסעיף הקודם, גם כאן הדגש יהיה על מרכז המעגל החסום. ננסח את המשפט העיקרי.

מרכז המעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזוויות של המשולש.

ההסבר – כפי שכבר למדנו (ראה בספר הנדסה חלק א' עמ' 375) שלושת חוצי הזוויות במשולש נפגשים בנקודה אחת ויחידה. נקודה זו נמצאת במרחקים שווים מצלעות המשולש.



אם נשרטט מעגל שרדיוסו שווה למרחקים הנ"ל ומרכזו בנקודת מפגש חוצי הזוויות אז כל אחת משלוש צלעות המשולש תשיק למעגל בנקודה אחת. כל נקודה אחרת על הצלעות תהיה מחוץ למעגל.

דוגמא:

בתוך משולש ABC חסום מעגל.

נקודות ההשקה הן D, E ו-F.

נתון: $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 60^\circ$.

חשב את זווית המשולש DEF.

פתרון:

נסתכל במשולש BDF. ע"ס המשפט "שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה" נקבל שמתקיים $BD = BF$. עפ"י הנתון $\angle B = 40^\circ$

ולכן $\angle BDF = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$. ע"ס המשפט "זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר" נקבל $\angle DEF = 70^\circ$.

באופן דומה, אם נסתכל במשולש CEF נקבל $\angle CEF = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

ולכן $\angle EDF = 60^\circ$. לבסוף במשולש DEF נקבל: $\angle DFE = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ$.

לסיכום: זווית המשולש DEF הן 70° , 60° , 50° .

תרגילים

(מעגל חסום במשולש)

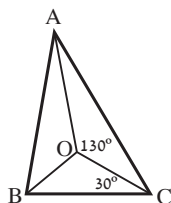
תרגילים יסודיים – מעגל חסום במשולש

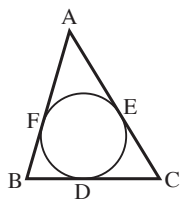
1) בצויר משמאל הנקודה O היא מרכז

המעגל החסום במשולש ABC.

מצא עפ"י הנתונים בצויר את זווית

המשולש ABC.

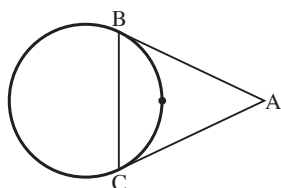




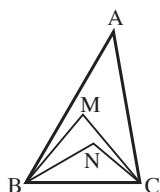
- (2) המשולש ABC שהיקפו P חוסם מעגל. נקודות
ההשקה הן D, E ו-F. נתון: $AC = a$.
א. הבע את הקטע BD באמצעות P ו-a.
ב. נתון: $BF = 3$ ס"מ, $AB + BC = 15$ ס"מ. מצא את P ו-a.

- (3) במשולש חד זווית ABC נתון: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $(\beta > \alpha)$. הנקודה M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש והנקודה N היא מרכז המעגל החסום במשולש. הבע את הזווית MCN בעזרת α ו- β .

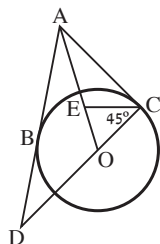
תרגילים נוספים – מעגל חסום במשולש



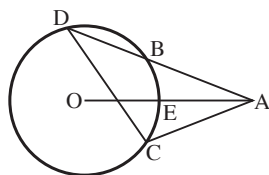
- (4) AB ו-AC משיקים למעגל בנקודות B ו-C בהתאמה. א. הוכח: נקודת האמצע של הקשת BC היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.
ב. מה צריך להיות גודל הזווית BAC כדי שהנקודה הנ"ל תהיה גם מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC? נמק.



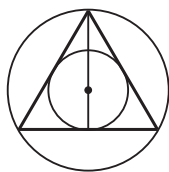
- (5) הנקודה M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC. הנקודה N היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC (המשולש לא שווה שוקיים). נתון: $\angle A = 40^\circ$.
חשב את הזוויות: א. $\angle BMC$, ב. $\angle BNC$.



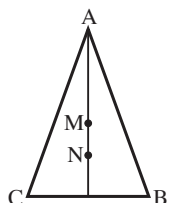
- (6) AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-C בהתאמה. המשך AB והמשך CO נחתכים בנקודה D. הנקודה E נמצאת על AO כך שמתקיים $\angle ECO = 45^\circ$.
א. מצא את המשולש שהנקודה E היא מרכז המעגל החסום בו והוכח את תשובתך.
ב. מה ניתן לומר על הקטע DE? נמק.



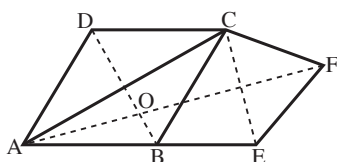
- (7) הנקודות B, C ו-D נמצאות על מעגל שמרכזו O. הנקודה A נמצאת על המשך BD. AO חותך את המעגל בנקודה E. נתון: $AB = AC$.
א. הוכח: $\widehat{BE} = \widehat{CE}$.
ב. מצא את המשולש שהנקודה E היא מרכז המעגל החסום בו והוכח את תשובתך.
ג. איזה תנאי צריך להתקיים כדי שהנקודה E תהיה מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC? הסבר.



- (8) הוכח את הטענות הבאות לגבי משולש שווה צלעות:
- במשולש שווה צלעות מרכז המעגל החוסם ומרכז המעגל החסום הם באותה נקודה.
 - במשולש שווה צלעות רדיוס המעגל החוסם שווה ל- $\frac{2}{3}$ הגובה של המשולש ורדיוס המעגל החסום שווה ל- $\frac{1}{3}$ הגובה של המשולש.

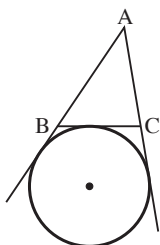


- (9) הנקודה M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC והנקודה N היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC. הנקודות A, M ו-N נמצאות על ישר אחד.
- הוכח: המשולש ABC הוא שווה שוקים.
 - איזה תנאי צריך להתקיים לגבי המרכזים M ו-N כדי שהמשולש יהיה שווה צלעות? נמק.
 - נתון שהנקודה M נמצאת בין הנקודה A לנקודה N. נסמן: $\angle BAC = \alpha$. מצא באיזה תחום נמצאת α . הוכח את תשובתך.



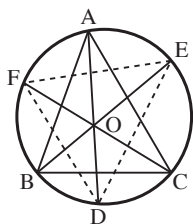
- (10) המרובע ABCD הוא מעוין והמרובע ACFE הוא דלתון ($CF = EF$, $AC = AE$). הנקודה O היא החיתוך של האלכסונים BD ו-AF.

- הוכח: הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ACE והיא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.
- סמן את החיתוך של BC ו-AF ב-G. חשב את זווית המעוין אם נתון שהנקודה G היא מרכז המעגל החסום במשולש ACE.



- (11) ABC הוא משולש.
- הוכח: קיים מעגל המשיק לצלע אחת של המשולש ולהמשכי שתי הצלעות האחרות. (הדרכה: ניתן לראות הדרכה בתשובה לתרגיל).
 - הוכח: הנקודה A, מרכז המעגל החסום במשולש ABC ומרכז המעגל הנ"ל נמצאים על ישר אחד.

- (12) הוכח: סכום הקטרים של המעגלים החוסם והחסום במשולש ישר זווית שווה לסכום שני הניצבים של המשולש.



13 המשולש ABC חסום במעגל. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש. המשכי הקטעים AO, BO ו- CO חותכים את המעגל החוסם בנקודות D, E ו- F בהתאמה.
א. נתון: $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$.
חשב את זווית המשולש DEF.

ב. (ללא קשר לנתונים של סעיף א') נסמן: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.
הוכח שזווית המשולש DEF הן: $\frac{\beta + \gamma}{2}$, $\frac{\alpha + \gamma}{2}$, $\frac{\alpha + \beta}{2}$.

תשובות (מעגל חסום במשולש):

- (1) $40^\circ, 80^\circ, 60^\circ$ א. $\frac{p}{2} - a$ ב. 24 ס"מ, 9 ס"מ. (3) $\frac{\beta - \alpha}{2}$ (4) ב. 60° .
(5) א. 80° ב. 110° (6) א. $\triangle ACD$ ב. הוא חוצה את הזווית D. (7) ב. $\triangle ACD$.
ג. $AE = BE = CE$ (9) ג. $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ (11) א. **הדרכה:** הוכח שקיימת נקודה שנמצאת במרחקים שווים מהצלע BC והמשכי שתי הצלעות האחרות. (13) א. $60^\circ, 55^\circ, 60^\circ$.

מרובע חסום במעגל

התכונה של מרובע החסום במעגל

נזכיר את ההגדרה של מרובע חסום במעגל.

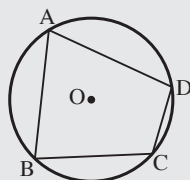
הגדרה:

מרובע חסום במעגל - מרובע שכל ארבעת קודקודיו נמצאים על מעגל נקרא **מרובע חסום במעגל** (מרובע בר חסימה).

ננסח עכשיו את התכונה האופיינית ל**כל** המרובעים החסומים במעגל.

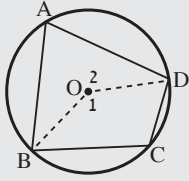
משפט:

בכל מרובע החסום במעגל סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180° .



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:
נתון: המרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O.
צ"ל: $\angle A + \angle C = 180^\circ$
 $\angle B + \angle D = 180^\circ$

הוכחה:



נעביר את הרדיוסים BO ו-DO. נסמן את הזווית BOD הקטנה בתור O_1 ואת הזווית BOD הגדולה בתור O_2 . נסתמך על המשפט: "זווית מרכזית במעגל גדולה פי 2 מכל זווית היקפית הנשענת על אותה קשת".

נקבל $\angle O_1 = 2\angle A$ (כי שתייהן נשענות על הקשת BD הקטנה).
באופן דומה $\angle O_2 = 2\angle C$ (כי שתייהן נשענות על הקשת BD הגדולה).
היות ומתקיים $\angle O_1 + \angle O_2 = 360^\circ$ אז גם $2\angle A + 2\angle C = 360^\circ$ ולכן $\angle A + \angle C = 180^\circ$. מכאן שגם $\angle B + \angle D = 180^\circ$.
מש"ל.

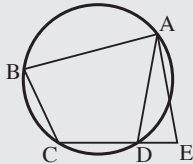
הערה:

עפ"י תכונות האנך האמצעי נקבל את הטענה הבאה:

מרכז המעגל החוסם מרובע הוא מפגש ארבעת האנכים האמצעיים לצלעות המרובע.

ההסבר – אנך מאמצע מיתר עובר דרך המרכז. (במרובע בר חסימה האנכים הנ"ל נפגשים בנקודה אחת).

דוגמא א':



המרובע ABCD חסום מעגל. הנקודה E נמצאת על המשך CD כך שמתקיים $AD = AE$.

א. הוכח: $\angle B = \angle E$.
ב. נתון: $\angle C = 115^\circ$, $\angle BAE = 85^\circ$.
חשב את הזווית B.

פתרון:

א. הוכחה:

שלב א': $\left. \begin{array}{l} \angle ADE = \angle E \quad (\text{עפ"י הנתון } AD = AE) \\ \angle ADE + \angle ADC = 180^\circ \quad (\text{זוויות צמודות}) \end{array} \right\}$

$\Downarrow$

$\angle E + \angle ADC = 180^\circ$ (החלפת זווית ADE בזווית השווה לה)

שלב ב': $\left. \begin{array}{l} \angle B + \angle ADC = 180^\circ \quad (\text{סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל}) \\ \angle E + \angle ADC = 180^\circ \quad (\text{הוכחנו בשלב א'}) \end{array} \right\}$

$\Downarrow$

$\angle B = \angle E$

מש"ל.

ב. עפ"י הנתון $\angle C = 115^\circ$ ולכן $\angle BAD = 65^\circ$ כי סכום שתי זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא 180° . כמו כן נתון $\angle BAE = 85^\circ$ ולכן $\angle DAE = 85^\circ - 65^\circ = 20^\circ$. המשולש ADE הוא שווה שוקיים ולכן $\angle E = 80^\circ$. הוכחנו שמתקיים $\angle B = \angle E$ ולכן $\angle B = 80^\circ$.

התכונה שאם מרובע מקיים אז ניתן לחסום אותו במעגל

ננסח עכשיו את המשפט ההפוך שבעזרתו ניתן לקבוע אם ניתן לחסום מרובע נתון בתוך מעגל.

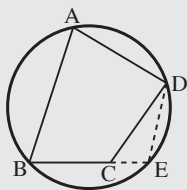
משפט:

אם במרובע יש זוג אחד של זוויות נגדיות שסכומן 180° אז ניתן לחסום אותו במעגל.

ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

נתון: מרובע ABCD שבו $\angle A + \angle C = 180^\circ$.
צ"ל: קיים מעגל העובר דרך הנקודות A, B, C ו-D.

הוכחה:



נשרטט מעגל דרך הנקודות A, B ו-D.
דבר זה אפשרי כי דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד ניתן להעביר תמיד מעגל אחד ויחיד. נניח בשלילה שהמעגל לא עובר דרך הנקודה C ונניח שהנקודה

C היא בתוך המעגל. (ההוכחה דומה למקרה שהנקודה C היא מחוץ למעגל).
במקרה כזה נוכל להמשיך את BC מהצד של C עד שיחתוך את המעגל בנקודה שנסמן אותה ב-E. המרובע ABED חסום במעגל ולכן עפ"י המשפט הקודם מתקיים $\angle A + \angle E = 180^\circ$. עפ"י הנתון $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ולכן $\angle C = \angle E$. אבל אם נסתכל במשולש DCE נראה שהזווית C (של המרובע) היא זווית חיצונית למשולש ולכן $\angle C > \angle E$ וזאת סתירה למה שקיבלנו.
מסקנה: הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על מעגל אחד.
מש"ל.

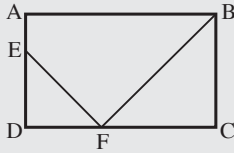
הערה:

עפ"י תכונות האנך האמצעי נקבל את הטענה הבאה:

אם במרובע כל ארבעת האנכים האמצעיים לצלעות נפגשים בנקודה אחת אז אפשר לחסום את המרובע במעגל והנקודה הנ"ל היא מרכז המעגל.

ההסבר – הנקודה נמצאת במרחקים שווים מקודקודי המרובע.

דוגמא ב':



המרובע ABCD הוא מלבן. הנקודה E נמצאת על AD והנקודה F נמצאת על DC. נתון: BF חוצה את הזווית ABC, $DE = DF$. הוכח: את המרובע ABFE אפשר לחסום במעגל.

פתרון:

הוכחה:

עפ"י הנתון BF חוצה את הזווית B שהיא זווית ישרה ולכן $\angle FBC = 45^\circ$. מכאן נקבל שגם $\angle BFC = 45^\circ$ (כי $\angle C = 90^\circ$). נסתכל עכשיו במשולש DEF. עפ"י הנתון $DE = DF$. כלומר המשולש הוא שווה שוקיים וישר זווית ($\angle D = 90^\circ$) ולכן $\angle DFE = 45^\circ$. מכאן נקבל $\angle EFB = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. המרובע ABCD הוא מלבן ולכן $\angle A = 90^\circ$, כלומר $\angle A + \angle EFB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. בסה"כ קיבלנו ששכום שתי זוויות נגדיות במרובע ABFE הוא 180° ולכן עפ"י המשפט האחרון אפשר לחסום את המרובע במעגל.

מש"ל.

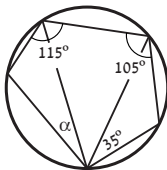
תרגילים

(מרובע חסום במעגל)

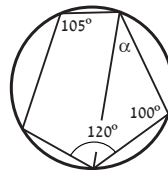
התכונה של מרובע החסום במעגל

תרגילים יסודיים – התכונה של מרובע החסום במעגל

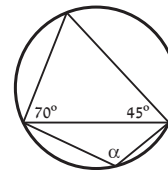
(1) מצא את הזווית α בציורים הבאים:



ג.



ב.

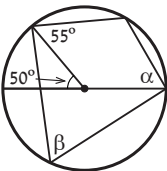


א.

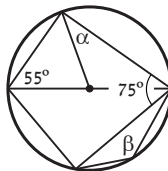
(2) מרובע ABCD חסום במעגל. נתון: $\angle A = \angle B$.

קבע איזה מרובע יכול להיות המרובע ABCD והוכח את תשובתך.

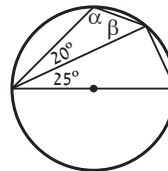
(3) מצא את הזוויות α ו- β עפ"י הנתונים בציורים הבאים: (מרכז המעגל מודגש)



ג.

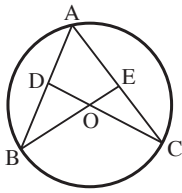


ב.

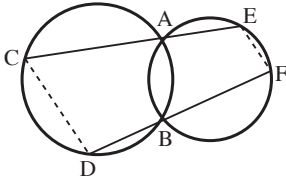


א.

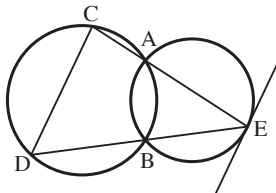
תרגילים נוספים – התכונה של מרובע החסום במעגל



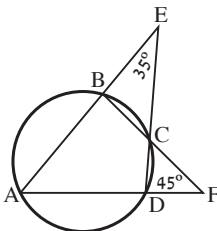
4. AB ו-AC הם מיתרים במעגל שמרכזו O. המשך BO חותך את AC בנקודה E והמשך CO חותך את AB בנקודה D. נתון שאת המרובע ADOE אפשר לחסום במעגל.
א. חשב את הזווית BOC.
ב. נסמן ב-F את אמצע BC. חשב את היחס: $\frac{OF}{AO}$.



5. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. הנקודות C ו-D נמצאות על המעגל הגדול והנקודות E ו-F נמצאות על המעגל הקטן כך שהקטע CE עובר דרך הנקודה A והקטע DF עובר דרך הנקודה B.
א. הוכח: $CD \parallel EF$.
ב. השלם: אם BE הוא קוטר במעגל הימני אז _____ הוא קוטר במעגל השמאלי. הוכח את תשובתך.



6. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. הנקודות C ו-D נמצאות על המעגל הגדול והנקודה E נמצאת על המעגל הקטן כך שהקטע CE עובר דרך A והקטע DE עובר דרך B.
הוכח: המשיק למעגל הקטן בנקודה E מקביל למיתר CD.



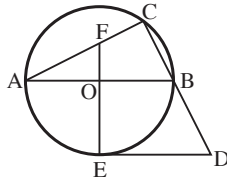
7. הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על המעגל. המשך AB והמשך DC נפגשים בנקודה E. המשך BC והמשך AD נפגשים בנקודה F. נתון: $\angle E = 35^\circ$, $\angle F = 45^\circ$.
חשב את הזווית A.

8. ABCD הוא מרובע החסום במעגל שמרכזו O כך ש-AB הוא קוטר. נתון: $DO \parallel BC$.
הוכח: א. $\angle ADO = \angle CDO$. ב. $AD = CD$.

התכונה שאם מרובע מקיים אז ניתן לחסום אותו במעגל

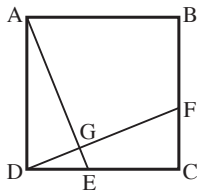
תרגילים יסודיים – התכונה שאם מרובע מקיים אז ניתן לחסום אותו במעגל

9. קבע אילו מהמרובעים הבאים ניתן לחסום במעגל:
(הערה: במקרים מסויימים מצא את התנאי לכך שאפשר לחסום את המרובע במעגל).
א. ריבוע. ב. מלבן. ג. מקבילית. ד. מעוין. ה. טרפז. ו. דלתון.

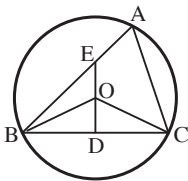


- 10** המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O
 כך ש-AB הוא קוטר. DE נוגע במעגל
 בנקודה E. הנקודה D נמצאת על המשך BC.
 הנקודה F נמצאת על AC ועל המשך OE.
 א. הוכח: את המרובע CDEF אפשר לחסום במעגל.
 ב. נתון: $AB \parallel DE$. הוכח: $\angle CFO = \angle DBO$.

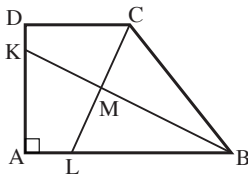
תרגילים נוספים – התכונה שאם מרובע מקיים אז ניתן לחסום אותו במעגל



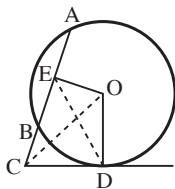
- 11** המרובע ABCD הוא ריבוע. הנקודות E ו-F
 נמצאות בהתאמה על הצלעות CD ו-BC. הקטעים
 AE ו-DF נחתכים בנקודה G. נתון: $CF = DE$.
 א. הוכח: המרובע ABFG הוא בר חסימה.
 ב. מצא בציור שתי נקודות שהן קצות קוטר
 של המעגל החוסם (נמק).
 ג. הוכח: $\angle GAF = \angle GBF$.



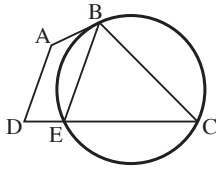
- 12** המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.
 הנקודה D היא אמצע BC. המשך DO חותך את AB
 בנקודה E.
 א. הוכח: את המרובע AEOC אפשר לחסום במעגל.
 ב. הוכח: $\angle BEO = \angle CAO$.



- 13** המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel DC$,
 $\angle A = 90^\circ$). BK ו-CL חוצים בהתאמה את
 הזוויות B ו-C והם נחתכים בנקודה M.
 א. הוכח: אפשר לחסום במעגל את המרובע KMLA.
 ב. הוכח: $\angle AKL = \angle AML$.
 ג. מצא מרובע נוסף בציור שהוא בר חסימה.
 הוכח את תשובתך.

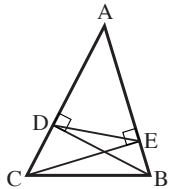


- 14** CD משיק למעגל בנקודה D ו-CBA הוא
 חותך למעגל שמרכזו O. הנקודה E היא
 אמצע AB.
 א. הוכח: המעגל העובר דרך הנקודות
 C, D, E עובר גם דרך הנקודה O.
 ב. הוכח: $\angle CED = \angle COD$.
 ג. היכן נמצא מרכז המעגל הנ"ל? נמק.

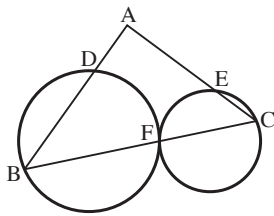


- 15** ABCD הוא מרובע שבו הצלע AB משיקה למעגל בנקודה B, הצלע BC היא מיתר במעגל והצלע DC חותכת את המעגל בנקודה E. נתון: $BE \parallel AD$.
- א. הוכח: המרובע ABCD הוא בר חסימה.
- ב. הוכח: $\angle DEB = \angle ABC$.
- ג. נתון: $\angle D < 90^\circ$, קבע היכן נמצא מרכז המעגל החוסם את המרובע ABCD: (1) על הקטע AC. (2) בתוך המשולש ABC. (3) מחוץ למשולש ABC. נמק את תשובתך.

- 16** במשולש ABC חוצי הזווית B ו-C נחתכים בנקודה D וחוצי הזווית החיצוניות של B ו-C נחתכים בנקודה E. הוכח: המעגל העובר דרך הנקודות B, C ו-D עובר גם דרך הנקודה E. היכן נמצא מרכז המעגל הנ"ל? נמק.



- 17** BD ו-CE הם גבהים במשולש ABC. הוכח: אפשר לחסום במעגל את המרובע CDEB. היכן נמצא מרכז המעגל החוסם הנ"ל? נמק.



- 18** שני מעגלים נוגעים זה בזה מבחוץ בנקודה F. ישר העובר דרך F חותך את המעגלים בנקודות B ו-C. המשכי המיתרים BD ו-CE נחתכים בנקודה A. הוכח: המרובע ADFE הוא בר חסימה.

תשובות (מרובע חסום במעגל):

- 1) א. 115° . ב. 35° . ג. 25° . 2) טרפז שווה שוקיים או מלבן. 3) א. 115° , 45° .
- ב. 35° , 130° . ג. 60° , 65° . 5) ב. BC. 7) 50° . 9) א. כן. ב. כן. ג. לא (אלא אם היא מלבן). ד. לא (אלא אם הוא ריבוע). ה. בתנאי שהוא שווה שוקיים – כן. ו. בתנאי שזווית הבסיס ישירות – כן. 11) ב. A, F. 13) ג. KDCM. 14) ג. באמצע CO.
- 15) ג. (3). 16) באמצע DE. 17) ב. באמצע BC.

מרובע חוסם מעגל

התכונה של מרובע החוסם מעגל

נדרון עכשיו במקרה שמרובע חוסם מעגל.

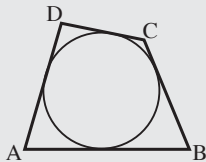
הגדרה:

מרובע חוסם מעגל – מרובע שכל צלעותיו משיקות למעגל נקרא מרובע חוסם מעגל (מרובע משיקים).

ננסח את התכונה האופיינית לכל המרובעים שחוסמים מעגל.

משפט:

במרובע חוסם מעגל סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

נתון: ABCD הוא מרובע החוסם מעגל.

צ"ל: $AB + CD = AD + BC$

הוכחה:

נסתמך על המשפט: "שני משיקים למעגל

היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה".

נסמן את הקטעים באותיות קטנות.

נקבל: $AB + CD = a + b + c + d$

וכן: $AD + BC = a + d + b + c$

כלומר $AB + CD = AD + BC$

מש"ל.

הערה:

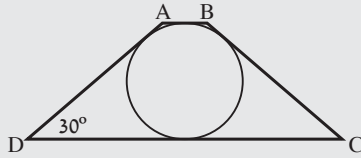
עפ"י תכונות חוצה הזווית נקבל את הטענה הבאה:

מרכז המעגל החסום במרובע הוא מפגש ארבעת חוצי הזוויות של המרובע.

ההסבר – כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים מהשוקיים.

(במרובע משיקים כל חוצי הזוויות נפגשים בנקודה אחת).

דוגמא:



המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים החוסם מעגל. $AB \parallel DC$, $AD = BC$. היקף הטרפז הוא 24 ס"מ. נתון: $\angle D = 30^\circ$. חשב את רדיוס המעגל.

פתרון:

נוריד גובה AE מהקודקוד A לבסיס DC. היות והטרפז חוסם מעגל אז סכום השוקיים שווה לסכום הבסיסים ולכן סכום השוקיים הוא מחצית מהיקף הטרפז, כלומר $AD + BC = \frac{24}{2} = 12$ ס"מ. מכאן שאורך כל שוק הוא $AD = BC = 6$ ס"מ. AE הוא ניצב מול זווית של 30° במשולש ישר זווית ולכן הוא שווה למחצית היתר, כלומר $AE = \frac{6}{2} = 3$ ס"מ. היות והבסיסים מקבילים זה לזה אז AE שווה לקוטר המעגל. לכן הרדיוס הוא 1.5 ס"מ $\left(\frac{3}{2}\right)$. (ראה גם תרגיל 8 בעמ' 321).

הערה:

עפ"י הדוגמא האחרונה נקבל את המסקנה הבאה (גם הטענה ההפוכה נכונה):

בטרפז שווה שוקיים שחוסם מעגל כל שוק שווה לקטע האמצעים.

התכונה שאם מרובע מקיים אז ניתן לחסום בתוכו מעגל

ננסח את המשפט ההפוך שבעזרתו ניתן לקבוע האם ניתן לחסום מעגל בתוך מרובע נתון. לא נוכיח את המשפט.

משפט:

אם במרובע קמור סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני אז אפשר לחסום מעגל במרובע.

הערה:

עפ"י תכונות חוצה הזווית נקבל את הטענה הבאה:

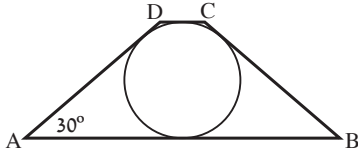
אם במרובע קמור כל ארבעת חוצי הזווית נפגשים בנקודה אחת אז אפשר לחסום מעגל במרובע והנקודה הנ"ל היא מרכז המעגל החסום.

ההסבר – הנקודה נמצאת במרחקים שווים מצלעות המרובע.

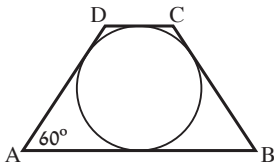
תרגילים (מרובע חוסם מעגל)

התכונה של מרובע החוסם מעגל

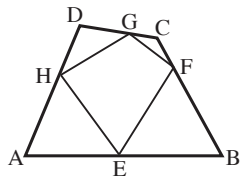
תרגילים יסודיים – התכונה של מרובע החוסם מעגל



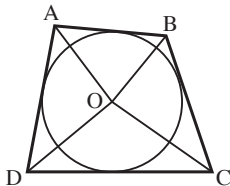
- (1) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים
החוסם מעגל. ($AD = BC$, $AB \parallel DC$).
נתון: $\angle A = 30^\circ$ ורדיוס המעגל הוא 2 ס"מ.
חשב את היקף הטרפז.



- (2) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים
החוסם מעגל. ($AD = BC$, $AB \parallel DC$).
נתון: $\angle A = 60^\circ$.
מצא את צלעות הטרפז אם היקפו הוא 40 ס"מ.



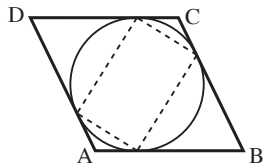
- (3) המרובע ABCD חוסם מעגל. (המעגל לא משורטט בצורה נקודות ההשקה)
הן E, F, G, H-ו. נתון: $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 130^\circ$.
חשב את זווית המרובע EFGH.



- (4) המרובע ABCD חוסם מעגל שמרכזו O.
א. הוכח: $\angle AOB + \angle DOC = 180^\circ$.
ב. מבלי להסתמך על סעיף א' הוכח:
אם $BO \perp OC$ אז גם $AO \perp OD$.

תרגילים נוספים – התכונה של מרובע החוסם מעגל

- (5) הוכח: אם בטרפז שווה שוקיים אפשר לחסום מעגל אז קטע האמצעים שווה לשוק.



- (6) המרובע ABCD הוא מעוין החוסם מעגל.
א. הוכח: ארבע נקודות ההשקה הן קודקודים של מלבן.
ב. הוכח: אלכסוני המעוין ואלכסוני המלבן נפגשים במרכז המעגל הנייל.
ג. נתון שהזווית החדה של המעוין היא α . הבע באמצעות α את הזווית החדה שבין אלכסוני המלבן.

(7) הוכח: בטרפז שווה שוקיים שבו אלכסון חוצה את אחת מזוויות הטרפז לא ניתן לחסום מעגל.

(8) הוכח: בטרפז שווה שוקיים שבו האלכסונים מאונכים זה לזה לא ניתן לחסום מעגל.

התכונה שאם מרובע מקיים אז ניתן לחסום בתוכו מעגל

תרגילים יסודיים – התכונה שאם מרובע מקיים אז ניתן לחסום בתוכו מעגל

(9) קבע באילו מהמרובעים הבאים ניתן לחסום מעגל:

(הערה: במקרים מסויימים מצא את התנאי לכך שאפשר לחסום מעגל במרובע).

- א. ריבוע. ב. מלבן. ג. מקבילית.
ד. מעוין. ה. טרפז. ו. דלתון.

תרגילים נוספים – התכונה שאם מרובע מקיים אז ניתן לחסום בתוכו מעגל

(10) המרובע ABCD הוא ריבוע. CE חוצה את זווית ACD.

F היא נקודה על AC כך שמתקיים: $AF = EF$.

א. הוכח: את המרובע EFCD אפשר לחסום במעגל.

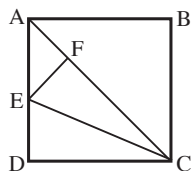
ב. הוכח: במרובע EFCD אפשר לחסום מעגל.

ג. נסמן ב-M את מרכז המעגל החוסם את המרובע

EFCD וב-N את מרכז המעגל החוסם במרובע EFCD.

הוכח: (1) הנקודות M ו-N נמצאות על הקטע EC.

(2) הנקודה N נמצאת בין M ל-E.



(11) DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC. נתון: $AC + AB = 3BC$.

א. הוכח: במרובע DEBC אפשר לחסום מעגל.

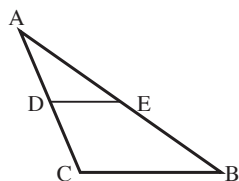
ב. הוכח: המעגל שניתן לחסום במרובע DEBC

והמעגל שניתן לחסום במשולש ABC הם אותו מעגל.

ג. הוכח: הנקודה A, מרכז המעגל החוסם במרובע

DEBC ומרכז המעגל החוסם במשולש ADE נמצאים

על ישר אחד.



(12) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel DC$).

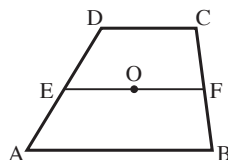
הנקודה O נמצאת על הקטע EF שהוא קטע

האמצעים בטרפז. נתון: $AE = EO$, $BF = FO$.

א. הוכח: אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.

ב. הוכח: הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם

בטרפז.



תשובות (מרובע חוסם מעגל):

- (1) 32 ס"מ. (2) 5 ס"מ, 10 ס"מ, 15 ס"מ, 10 ס"מ. (3) 85° , 115° , 95° , 65° .
(6) ג. α . (9) א. כן. ב. לא (אלא אם הוא ריבוע). ג. לא (אלא אם היא מעוין).
ד. כן. ה. בתנאי ששכום הבסיסים שווה לשכום השוקיים – כן. ו. כן.

מצולע חסום במעגל ומצולע חוסם מעגל

בסעיף זה נדון במצולע משוכלל החסום במעגל ובמצולע משוכלל החוסם מעגל.
נזכיר תחילה את ההגדרה.

מצולע משוכלל – מצולע שכל זוויתיו וכל צלעותיו שוות זו לזו נקרא מצולע משוכלל.

נזכיר מהו גודלה של כל זווית פנימית.

גודל כל זווית במצולע משוכלל בעל n צלעות הוא $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

ננסח עכשיו כמה משפטים.

משפט:

אם מחלקים מעגל ל- n קשתות שוות ומחברים את נקודות החלוקה בזו אחר זו מקבלים מצולע משוכלל בעל n צלעות.

לא נוכיח את המשפט ונסתפק בהסבר כללי:
מסתמכים על כך שלקשתות שוות מתאימים מיתרים שווים וכן על כך שכל הזוויות הפנימיות של המצולע נשענות על קשתות שוות. (כל קשת אורכה $n-2$ קשתות קטנות).

משפט:

כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.

גם כאן נסתפק בהסבר כללי:
מעבירים חוצי שתי זוויות סמוכות של המצולע. לאחר מכן מחברים את קודקודי המצולע עם נקודת המפגש של שני חוצי הזוויות הנ"ל ומוכיחים בעזרת חפיפת משולשים שהנקודה הנ"ל נמצאת במרחקים שווים מקודקודי המצולע ולכן היא מרכזו של מעגל החוסם את המצולע.

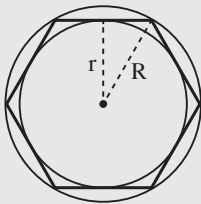
בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.

נביא את ההסבר הכללי:

לפי המשפט הקודם אפשר לחסום את המצולע במעגל. הצלעות של המצולע הן מיתרים במעגל החוסם, היות והן שוות זו לזו אז הן נמצאות במרחקים שווים מהמרכז ולכן קיים מעגל החוסם במצולע. כלומר – מרכז המעגל החוסם מתלכד עם מרכז המעגל החוסם.

נוכל לסכם:

כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.
בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.
מרכז המעגל החוסם את המצולע ומרכז המעגל החוסם במצולע מתלכדים.



לדוגמא – בציור משורטטים משושה משוכלל, המעגל שחוסם אותו והמעגל שחוסם בו. מרכזי המעגלים הם באותה נקודה.

רדיוס המעגל החוסם את המצולע הוא R
 ורדיוס המעגל החוסם במצולע הוא r .

הערה:

כל מצולע משוכלל בעל n צלעות אפשר לחלק ל- n משולשים שווים שוקיים החופפים זה לזה, שקודקוד הראש שלהם הוא במרכז המעגל החוסם והחוסם של המצולע.

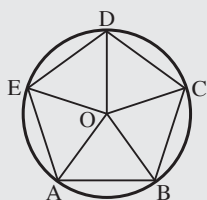
גודל זווית הראש של משולש שווה שוקיים כנ"ל הוא: $\frac{360^\circ}{n}$.

דוגמא:

מצא את גודלה של זווית פנימית במחומש משוכלל.

פתרון:

דרך א' – סכום הזוויות הפנימיות במצולע קמור בעל n צלעות הוא $180^\circ(n-2)$. (ראה בספר הנדסה חלק א' עמ' 207). לכן סכום הזוויות הפנימיות במחומש משוכלל הוא $180^\circ \cdot 3 = 540^\circ = 180^\circ(5-2)$. כל הזוויות הפנימיות במחומש משוכלל שוות ולכן גודל כל זווית הוא $108^\circ = \frac{540^\circ}{5}$.



דרך ב' – נסמן ב-O את מרכז המעגל החוסם את המחומש ונעביר רדיוסים ממרכז המעגל לקודקודים. בצורה כזאת מתקבלים 5 משולשים שווים שוקיים החופפים זה לזה. נסתכל למשל במשולש AOB.

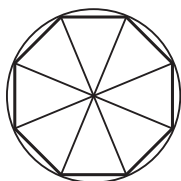
הזווית AOB היא זווית מרכזית במעגל ולכן גודלה הוא $\angle AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

המשולש AOB הוא שווה שוקיים ולכן $\angle ABO = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$ מכאן נקבל שגם $\angle CBO = 54^\circ$, לכן $\angle ABC = 54^\circ + 54^\circ = 108^\circ$ וזאת אותה תוצאה שקיבלנו קודם.

תרגילים

(מצולע חסום במעגל ומצולע חוסם מעגל)

תרגילים יסודיים – מצולע חסום במעגל ומצולע חוסם מעגל



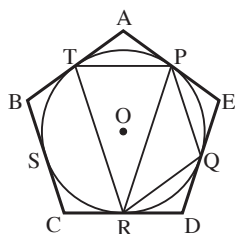
(1) במצולע משובלל בעל 8 צלעות (מתומן) חיברו את מרכז המעגל החוסם עם קודקודי המצולע וקיבלו 8 משולשים.

א. חשב את הזווית של אחד מהמשולשים הנ"ל.

ב. סמן בציור קטע שהוא רדיוס המעגל החוסם במתומן.

(2) כמו בסעיף א' של התרגיל הקודם כאשר המצולע הוא בעל:

א. 9 צלעות. ב. 10 צלעות. ג. 15 צלעות.



(3) ABCDE הוא מחומש משובלל החוסם מעגל שמרכזו O.

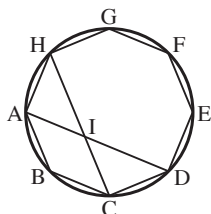
הנקודות P, Q, R, S ו-T הן נקודות ההשקה.

א. חשב את הזווית של המשולשים הבאים:

(1) ATP (2) TPR (3) PQR (4) AOP.

ב. סמן בציור קטע שהוא רדיוס המעגל החוסם במחומש וקטע שהוא רדיוס המעגל החוסם את המחומש.

תרגילים נוספים – מצולע חסום במעגל ומצולע חוסם מעגל



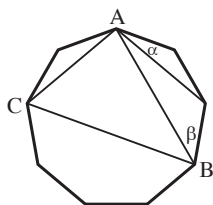
(4) ABCDEFGH הוא מצולע בעל 8 צלעות שוות החסום במעגל. האלכסונים AD ו-CH נחתכים בנקודה I.

א. הסבר מדוע המצולע הוא מצולע משובלל.

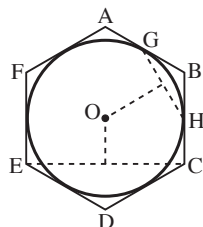
ב. חשב את זווית המרובעים ABCD ו-ABCI.

ג. איזה מרובע הוא כל אחד מהמרובעים הנ"ל? נמק.

ד. הוכח שהמרובע ABEF הוא מלבן.



- (5) המצולע שבציור הוא מצולע משוכלל
 בעל 9 צלעות. (ראה ציור).
 א. חשב את הזוויות α ו- β .
 ב. חשב את הזוויות של המשולש ABC.



- (6) ABCDEF הוא משושה משוכלל החוסם מעגל
 שמרכזו O. G ו-H הן שתיים מנקודות ההשקה.
 נתון שצלע המשושה היא a.
 הבע באמצעות a את:
 א. קוטר המעגל החוסם את המשושה.
 ב. מרחק הקטע CE מהמרכז O.
 ג. מרחק המיתר GH מהמרכז O.

תשובות (מצולע חסום במעגל וחוסם מעגל):

- (1) א. $45^\circ, 67.5^\circ, 67.5^\circ$. 2) א. $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$. ב. $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$. ג. $24^\circ, 78^\circ, 78^\circ$.
 (3) א. (1) $108^\circ, 36^\circ, 36^\circ$. (2) $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$. (4) $54^\circ, 90^\circ, 36^\circ$. (4) ב. $45^\circ, 135^\circ$.
 $45^\circ, 135^\circ, 45^\circ$; $45^\circ, 135^\circ, 45^\circ$. ג. טרפז שווה שוקיים; מעוין. (5) א. $20^\circ, 40^\circ$.
 ב. $80^\circ, 40^\circ, 60^\circ$. 6) א. $2a$. ב. $\frac{a}{2}$. ג. $\frac{3}{4}a$.

תרגילים לחזרה – מעגל חוסם ומעגל חסום

סיכום המושגים העיקריים של הפרק האחד עשר:

מעגל חוסם משולש – המעגל שעובר דרך שלושת קודקודיו של המשולש.
משפט – מרכז המעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים לצלעות המשולש.
מעגל חסום במשולש – המעגל ששלוש צלעות המשולש משיקות לו.
משפט – מרכז המעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזוויות של המשולש.
מרובע חסום במעגל – מרובע שכל ארבעת קודקודיו על המעגל.
משפט – בכל מרובע החסום במעגל סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180° .
משפט הפוך – אם במרובע יש זוג אחד של זוויות נגדיות שסכומן 180° אז ניתן לחסום אותו במעגל.
מרובע חוסם מעגל – מרובע שכל צלעותיו משיקות למעגל.

משפט – במרובע חוסם מעגל סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.

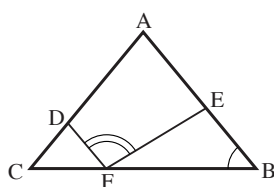
משפט הפוך – אם במרובע קמור סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני אז אפשר לחסום מעגל במרובע.

משפט – כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.

משפט – בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.

תרגילים

(תרגילים לחזרה – מעגל חוסם ומעגל חסום)



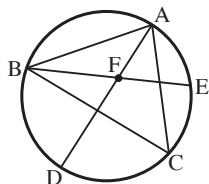
(1) המשולש ABC הוא שווה שוקיים

$(AB = AC)$. הנקודות E, D ו-F

נמצאות על צלעות המשולש.

נתון: $\angle DFE = 2\angle B$.

הוכח: $\angle ADE = \angle AFE$.



(2) המשולש ABC חסום במעגל.

המיתרים AD ו-BE נחתכים בנקודה F.

נתון שהנקודה F היא מרכז המעגל החסום

במשולש ABC.

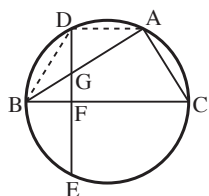
א. הוכח: $\widehat{AE} = \widehat{CE}$, $\widehat{BD} = \widehat{CD}$.

ב. נתון ש-AD הוא קוטר במעגל החוסם את

המשולש ABC והוא חותך את המיתר BC

בנקודה G. הוכח שהקטע FG הוא רדיוס

במעגל החסום במשולש ABC.



(3) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע BC

היא קוטר. הנקודה F נמצאת על BC והיא

אמצע המיתר DE. AB ו-DE נחתכים בנקודה G.

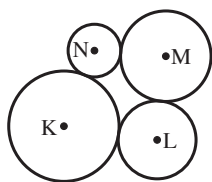
הוכח:

א. את המרובע ACFG אפשר לחסום במעגל.

ב. $\angle ADB = \angle AGF$.

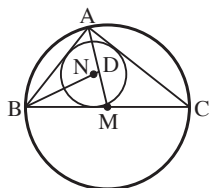
ג. היכן נמצא מרכז המעגל החוסם את המרובע

ACFG? נמק.

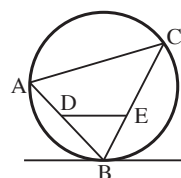


- 4) ארבעה מעגלים שמרכזיהם M, L, K, N ו- N משיקים כמתואר בציור.

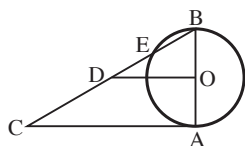
הוכח: חוצי הזווית במרובע $KLMN$ נפגשים בנקודה אחת.



- 5) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו M כך שהצלע BC היא קוטר. בתוך המשולש ABC חסום מעגל שמרכזו N . המשך BN חותך את AM בנקודה D . נתון: $\angle BDM - \angle C = 35^\circ$. חשב את הזווית BDM .

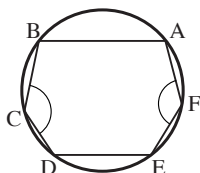


- 6) המשולש ABC חסום במעגל. דרך הנקודה B עובר משיק למעגל. D ו- E הן נקודות על AB ו- AC בהתאמה כך שהקטע DE מקביל למשיק. א. הוכח: המעגל החוסם את המשולש ADC עובר בנקודה E . ב. נתון שהזווית ADC היא זווית קהה. הוכח שהזווית DEC היא זווית קהה.

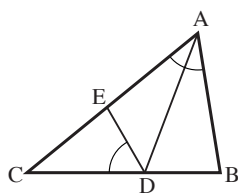


- 7) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O . AC נוגע במעגל בנקודה A . D היא נקודה על BC כך שהקטע DO מקביל ל- AC . הקטע BC חותך את המעגל גם בנקודה E . א. הוכח: הנקודה D היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC . ב. נתון שהנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDO . חשב את הזווית C .

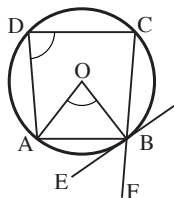
- 8) תן דוגמאות לשלושה מרובעים שניתן לחסום אותם במעגל וניתן לחסום בתוכם מעגל. רשום את התנאים הדרושים.



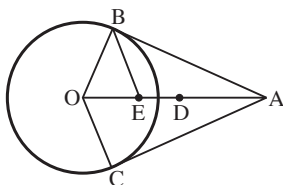
- 9) $ABCDEF$ הוא משושה החסום במעגל. נתון: $\angle BCD = \angle AFE$. א. הוכח: $AB \parallel ED$. ב. איזה תנאי, המתייחס לצלעות המשושה, צריך להתקיים כדי ש- CF יהיה מקביל ל- AB ו- ED ? הוכח את תשובתך.



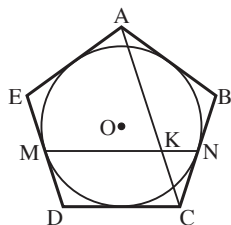
- 10** במשולש ABC היא נקודה על BC ו-E היא נקודה על AC כך שמתקיים $BD = ED$.
נתון: $\angle CDE = \angle BAC$.
א. הוכח: AD חוצה את הזווית BAC.
ב. נסמן ב-F נקודה על CE כך ש- $\angle EDF = \angle CDF$.
הוכח: $FD \parallel EB$.



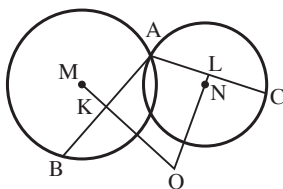
- 11** המרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O. BE משיק למעגל בנקודה B. הנקודה F נמצאת על המשיך BC. נתון ש-BE חוצה את הזווית ABF.
הוכח: $\angle AOB = \angle D$.



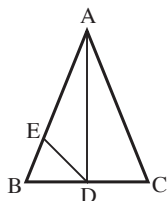
- 12** AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-C. הנקודה D היא אמצע AO. הנקודה E נמצאת על AO כך ש- $\angle OBE = 45^\circ$.
הוכח:
א. אפשר לחסום במעגל את המרובע ABOC והנקודה D היא מרכז המעגל.
ב. אפשר לחסום מעגל במרובע ABOC והנקודה E היא מרכז המעגל.



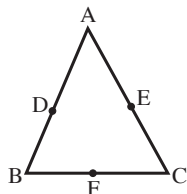
- 13** ABCDE הוא מחומש משוכלל החוסם מעגל שמרכזו O. M ו-N הן שתיים מנקודות ההשקה. האלכסון AC חותך את הקטע MN בנקודה K.
א. הוכח שמרובע MKCD הוא מקבילית.
ב. נתון שהיקף המחומש הוא P. הבע באמצעות P את היקף המקבילית.



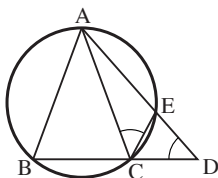
- 14** מרכזי שני מעגלים הם בנקודות M ו-N. הנקודה K היא אמצע המיתר AB והנקודה L היא אמצע המיתר AC. המשיך הקטע MK והמשיך הקטע LN נחתכים בנקודה O.
א. הוכח: הנקודה O היא מרכז המעגל שחוסם את המשולש שקודקדיו הם A, B ו-C.
ב. נתון: $\angle MOL = 70^\circ$. חשב את הזווית BAC ואת הזווית BOC.



- 15** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
 AD הוא חוצה זווית הראש A. E היא נקודה על AB כך שמתקיים $DB = DE$.
 א. הוכח: המעגל החוסם את המשולש ADE עובר דרך הנקודה C ו-AC הוא קוטר במעגל.
 ב. הוכח: $\angle BAC + \angle ADE = 90^\circ$.
 ג. הוכח: $DE = DC$.

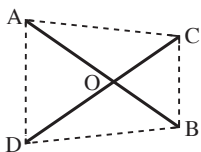


- 16** במשולש ABC חסום מעגל. (המעגל לא משורטט בצורה נקודות)
 ההשקה הן E, D ו-F נתון:
 $AB = 10$ ס"מ, $AC = 11$ ס"מ, $BC = 9$ ס"מ.
 חשב את אורכי הקטעים AD, BF ו-CE.

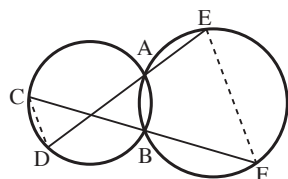


- 17** המשולש ABC החסום במעגל הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
 E נקודה כלשהי על הקשת AC.
 המשכי המיתרים AE ו-BC נפגשים בנקודה D.
 א. הוכח: $\angle ACE = \angle D$.
 ב. נתון: $\angle CAD = 21^\circ$, $\angle BAC = \angle ACE$.
 חשב את הזווית D.

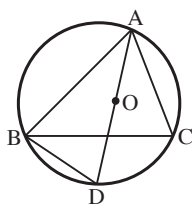
- 18** בטרפז שווה שוקיים שבו ניתן לחסום מעגל, אחד מהבסיסים גדול פי 3 מהבסיס השני.
 מצא את זווית הטרפז.



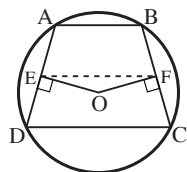
- 19** AB ו-CD הם שני קטעים שווים שנחתכים בנקודה O. נתון: $AO = DO$.
 הוכח: את המרובע ACBD אפשר לחסום במעגל.



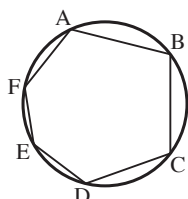
- 20** שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B.
 הנקודות C ו-D נמצאות על המעגל הקטן והנקודות E ו-F נמצאות על המעגל הגדול.
 כך שהקטע CF עובר דרך הנקודה B והקטע DE עובר דרך הנקודה A.
 הוכח: $CD \parallel EF$.



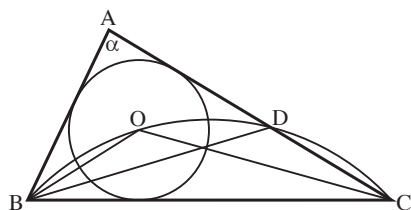
- (21)** המעגל שבציור חוסם את המשולש ABC. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC. המשך AO חותך את המעגל בנקודה D. הוכח: $BD = DO$.



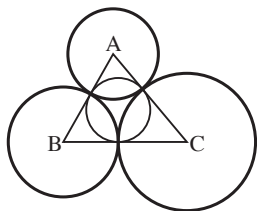
- (22)** ABCD הוא טרפז החסום במעגל שמרכזו O. E ו-F הן נקודות על השוקיים. נתון: $OE \perp AD$, $OF \perp BC$. הוכח: א. $EF \parallel DC$, $EF = \frac{AB+DC}{2}$. ב. $\angle EOF = 2\angle C$.



- (23)** ABCDEF הוא משושה החסום במעגל. הוכח: $\angle A + \angle C + \angle E = 360^\circ$.



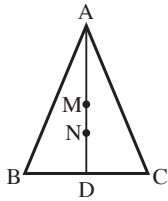
- (24)** מעגל שמרכזו O חסום במשולש ABC. דרך הנקודות B, O ו-C עובר מעגל שחותך את הצלע AC בנקודה D. נסמן: $\angle A = \alpha$. הוכח: א. $\angle BOC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. ב. $AB = AD$.



- (25)** שלושה מעגלים שמרכזיהם A, B ו-C משיקים מבחוץ זה לזה כמתואר בציור. הוכח: נקודות ההשקה של המעגלים זה עם זה הן נקודות ההשקה של המעגל החסום במשולש ABC. (הדרכה: העבר את המשיקים המשותפים למעגלים דרך נקודות ההשקה).

- (26)** במרובע מעבירים את שני האלכסונים כך שנוצרים ארבעה משולשים. א. הוכח: מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים הנ"ל הם קודקודים של מקבילית. ב. איזה תנאי צריך לקיים המרובע כדי שהמקבילית תהיה מלבן? נמק.

(27) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).



AD הוא הגובה לבסיס BC. הנקודה M

היא מרכז המעגל החוסם את המשולש

ABC והנקודה N היא מרכז המעגל

החסום במשולש ABC.

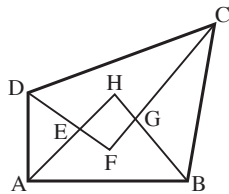
א. הסבר מדוע הנקודות M ו-N נמצאות

על AD.

ב. נתון שהנקודה M נמצאת בין A ל-N.

הוכח: $\angle A < 60^\circ$.

(28) העבירו במרובע ABCD את ארבעת



חוצי הזוויות וקיבלו מרובע EFGH.

א. הוכח: אפשר לחסום במעגל

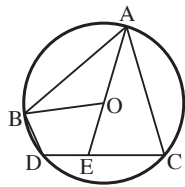
את המרובע EFGH.

ב. באיזה מרובע ABCD לא יתקבל

מרובע EFGH כנ"ל? נמק.

הערה: תרגילים 29–37 הם קצת יותר קשים מהרגיל.

(29) AB ו-AC הם מיתרים שווים במעגל



שמרכזו O. המשך הקטע AO חותך

את המיתר DC בנקודה E.

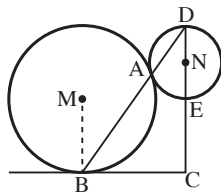
א. הוכח: המרובע DBOE הוא בר חסימה.

ב. נתון: $AE = AC$. נסמן: $\angle BAC = \alpha$.

הבע באמצעות α את זוויות המרובע DBOE.

ג. מצא את α עבורה $BO \parallel DC$.

(30) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N משיקים



מבחוץ בנקודה A. BC משיק למעגל

השמאלי בנקודה B. המשך AB חותך

את המעגל הימני בנקודה D. DE הוא קוטר

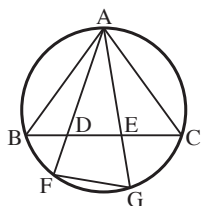
במעגל הימני והמשכו נפגש עם BC בנקודה C.

הוכח:

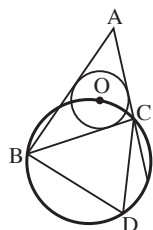
א. $BM \parallel DC$.

ב. המעגל החוסם את המשולש ABC עובר

דרך הנקודה E.

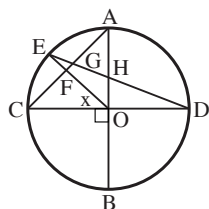


- (31)** ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) החסום במעגל. D ו-E הן נקודות על הבסיס BC. המשכי הקטעים AD ו-AE חותכים את המעגל בהתאמה בנקודות F ו-G. הוכח: אפשר לחסום במעגל את המרובע DEGF.

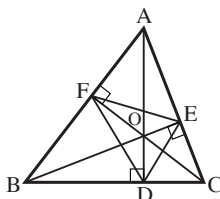


- (32)** בתוך משולש ABC חסום מעגל קטן שמרכזו O. המרכז O נמצא על מעגל גדול שחוסם את המשולש BDC. נתון: $\angle BDC = 65^\circ$. חשב את הזווית A.
ב. (ללא קשר לנתון של סעיף א') נסמן $\angle D = \alpha$. הבע באמצעות α את זווית A.

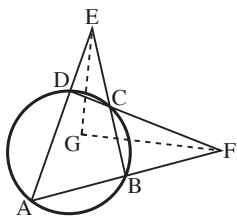
- (33)** ABC הוא משולש שווה שוקיים שבו $AB = AC$. D היא נקודה על השוק AC כך שהקטע BD עובר דרך מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC. נתון: $BC = DC$. חשב את זווית המשולש ABC.



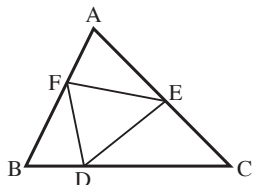
- (34)** AB ו-CD הם קטרים במעגל שמרכזו O הניצבים זה לזה. המיתר DE חותך את AB בנקודה H ואת AC בנקודה G. הרדיוס EO חותך את AC בנקודה F. מצא את גודל הזווית COE המסומנת ב-x. עבורה ניתן לחסום במעגל את המרובע FGHO.



- (35)** AD, BE ו-CF הם הגבהים במשולש ABC שנפגשים בנקודה O שבתוך המשולש. הוכח: הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש DEF. (**הדרכה:** ניתן לראות הדרכה בתשובה לתרגיל).



- (36)** ABCD הוא מרובע החסום במעגל.
 הנקודה E היא החיתוך של המשיכי
 המיתרים AD ו-BC. הנקודה F
 היא החיתוך של המשיכי המיתרים
 AB ו-DC. חוצי הזוויות E ו-F
 נחתכים בנקודה G.
 הוכח: $\angle EGF = 90^\circ$.



- (37)** הנקודות E, D, F נמצאות בהתאמה
 על צלעות המשולש ABC.
 הוכח: שלושת המעגלים החוסמים
 את המשולשים AEF, BDF ו-CDE
 נחתכים בנקודה אחת.
(רמז: ניתן לראות רמז בתשובה לתרגיל).

תשובות (תרגילים לחזרה – מעגל חוסם ומעגל חסום):

- 5) 40° . 7) ב. 30° . 8) ריבוע, טרפז שווה שוקיים שבו סכום הבסיסים שווה לסכום
 השוקיים, דלתון שזוויות הבסיס שלו ישרות. 9) ב. $AF = BC$ (או $DC = EF$). 13) ב. $\frac{3}{5}p$.
 14) ב. $110^\circ, 140^\circ$. 16) 6 ס"מ, 4 ס"מ, 5 ס"מ. 17) ב. 46° . 28) ב. במרובע שניתן
 לחסום בתוכו מעגל. 29) ב. α , $90^\circ + \frac{\alpha}{4}$, $180^\circ - \alpha$, $90^\circ - \frac{\alpha}{4}$. ג. 72° . 32) א. 50° .
 ב. $180^\circ - 2\alpha$. 34) 30° . 35) הדרכה: הוכח תחילה שאפשר לחסום במעגל את המרובעים
 AEOF, BDOF, CDOE. לאחר מכן הוכח שהקטעים DO, EO ו-FO הם חוצי זוויות במשולש
 DEF. 37) רמז: שניים מהמעגלים תמיד נחתכים.

פרק שנים עשר

הנדסת המישור – שטחים ומשפט פיתגורס במעגל

שטחים של מרובעים ומשולש במעגל

פרק זה כולל תרגילים עם שטחים ומשפט פיתגורס במעגל. הסעיף הראשון כולל תרגילים עם שטחי מרובעים ומשולש במעגל. הסברים, דוגמאות ותרגילים נוספים מופיעים בספר הנדסה חלק ב' בעמ' 338–367. כמו כן מופיעים תרגילים הכוללים שטחים בספר מתמטיקה חלק א'.

נזכיר שוב את הנוסחאות העיקריות.

שטחים של מרובעים ומשולש

$S = \frac{k^2}{2}$	או	$S = a^2$	שטח ריבוע שווה למכפלת הצלע בעצמה או למחצית מכפלת אלכסון בעצמו.
$S = a \cdot b$			שטח מלבן שווה למכפלת שתי צלעות סמוכות.
$S = a \cdot h_a$			שטח מקבילית שווה למכפלת צלע בגובה המורד אליה.
$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$			שטח משולש שווה למחצית מכפלת צלע בגובה המורד אליה.
$S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$			שטח טרפז שווה למחצית מכפלת סכום הבסיסים בגובה.
$S = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$			שטח מרובע שאלכסונו מאונכים שווה למחצית מכפלת האלכסונים.

$$S = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$$

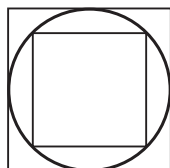
או

$$S = a \cdot h$$

שטח מעוין שווה למכפלת הצלע בגובה או למחצית מכפלת האלכסונים.

תרגילים (שטחים של מרובעים ומשולש במעגל)

הערה: ראה גם תרגילים בספר מתמטיקה חלק א'.

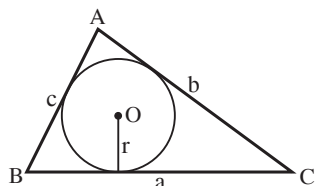


(1) במעגל שרדיוסו R חסום ריבוע.

א. הבע באמצעות R את שטח הריבוע.

ב. הבע באמצעות R את שטחו של

ריבוע שחוסם את המעגל.

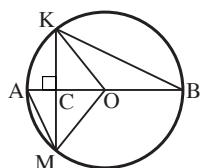


(2) הוכח: שטח משולש שווה למכפלת

מחצית היקף המשולש ברדיוס המעגל

החסום במשולש.

(הדרכה: צ"ל: $S = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$.)



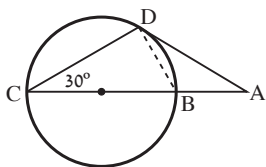
(3) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. KM הוא

מיתר המאונך ל-AB שחותך אותו בנקודה C.

א. הוכח: $S_{BOK} = S_{AOM}$.

ב. נתון: $AB = 20$ ס"מ, $AC = 40$ סמ"ר, $S_{BOK} =$

16 סמ"ר. $S_{ACM} =$ חשב את KM ו-BC.



(4) מהנקודה A יוצאים למעגל חותך ABC העובר

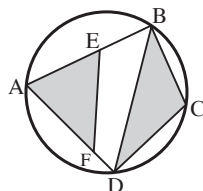
דרך מרכז המעגל ומשיק AD המשיק למעגל

בנקודה D. נתון: $\angle ACD = 30^\circ$.

א. חשב את הזווית A.

ב. חשב את היחס בין שטח המשולש BCD

לשטח המשולש ACD.



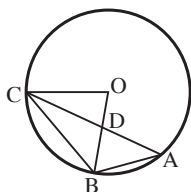
(5) ABCD הוא מרובע החסום במעגל שבו

$AB > BC$ ו- $AD > CD$. E ו-F הן

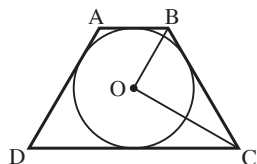
בהתאמה נקודות על AB ו-AD כך

שמתקיים $AE = BC$ ו- $AF = CD$.

הוכח: $S_{AEF} = S_{BCD}$.

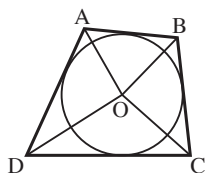


- (6) ABC הוא משולש החסום במעגל שמרכזו O כמתואר בציור. הרדיוס BO חותך את הצלע AC בנקודה D. נתון: AC חוצה את הזווית BCO. הוכח: $S_{COD} = S_{ABD}$.

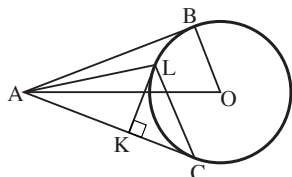


- (7) ABCD הוא טרפז שווה שוקיים החוסם מעגל שמרכזו O. $(AB \parallel DC)$. הוכח: $S_{BOC} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.
ב. נסמן את הבסיסים ב-a ו-b ואת רדיוס המעגל ב-r. הוכח: $BO \cdot CO = \frac{a+b}{2} \cdot r$.

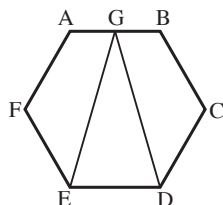
- (8) במעוין שהצלע שלו a ואלכסוניו הם k_1 ו- k_2 חסום מעגל שרדיוסו r. הוכח: $k_1 \cdot k_2 = 4ar$.



- (9) ABCD הוא מרובע החוסם מעגל שמרכזו O. הוכח: $S_{AOB} + S_{DOC} = S_{BOC} + S_{AOD}$.
ב. נתון שהיקף המרובע הוא 40 ס"מ ושטחו 100 סמ"ר. חשב את רדיוס המעגל החסום במרובע.



- (10) AC ו-AB משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-C בהתאמה. הנקודה K נמצאת על AC כך ש-KL משיק למעגל בנקודה L ומאונך ל-AC. הוכח: $S_{ABO} = S_{ALC}$.
ב. נתון: $AB = 14$ ס"מ, $S_{ABO} = 35$ סמ"ר. חשב את שטח המשולש AKL.



- (11) ABCDEF הוא משושה שכל זוויותיו שוות ונתון שאפשר לחסום אותו במעגל. נתון: $AB = ED$. הוכח שהמשושה הוא משושה משוכלל.
ב. הנקודה G היא אמצע הצלע AB. הוכח: $S_{AGEF} = S_{GED}$.

תשובות (שטחים של מרובעים ומשולש במעגל):

- (1) א. $2R^2$. ב. $4R^2$. (3) ב. 16 ס"מ, 16 ס"מ. (4) א. 30° . ב. 2:3. (9) ב. 5 ס"מ. (10) ב. 22.5 סמ"ר.

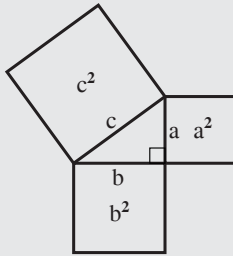
משפט פיתגורס במעגל

משפט פיתגורס

בסעיף זה נראה שימושים למשפט פיתגורס במעגל. הסברים, דוגמאות ותרגילים נוספים מופיעים בספר הנדסה חלק ב' בעמ' 368–388 ובספר מתמטיקה חלק א'.

לפני שנביא דוגמאות נזכיר את המשפט ונביא גם הוכחה למשפט.

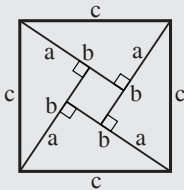
משפט פיתגורס:



בכל משולש ישר זווית סכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר.

אם נסמן את הניצבים ב-a ו-b ואת היתר ב-c נקבל:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{משפט פיתגורס:}$$



הוכחה של משפט פיתגורס: (קיימות הוכחות רבות נוספות)

בתוך ריבוע שצלעו c משרטטים 4 משולשים משולשים ישרי זווית חופפים שהניצבים שלהם הם a ו-b והיתר הוא c. מאחר שהמשולשים חופפים אז המרובע הפנימי הוא ריבוע שצלעו b-a.

נחשב את שטח הריבוע החיצוני בשתי דרכים:

פעם אחת ע"י הכפלת הצלע שלו בעצמה ופעם שנייה ע"י חיבור שטחי ארבעת

$$\text{המשולשים ושטח הריבוע הקטן. נקבל: } 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b-a)^2 = c^2$$

$$\text{כלומר: } a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{ולכן} \quad 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = c^2$$

מש"ל.

דוגמא א':

המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O

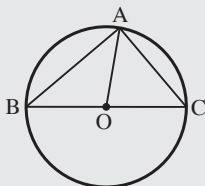
ורדיוסו 10 ס"מ כך שהצלע BC היא קוטר.

נתון: AC = 12 ס"מ.

א. חשב את הצלע AB.

ב. חשב את שטח המשולש ABC.

ג. חשב את שטחי המשולשים ABO ו-ACO.



פתרון:

א. המשולש ABC הוא ישר זווית כי הזווית BAC היא זווית היקפית הנשענת על קוטר ולכן היא זווית ישרה. עפ"י משפט פיתגורס נקבל: $AB^2 + AC^2 = BC^2$. היות ורדיוס המעגל הוא 10 ס"מ אז הקוטר BC הוא 20 ס"מ. עפ"י הנתון $AC = 12$ ס"מ ולכן $AB^2 + 12^2 = 20^2$ מכאן נקבל $AB^2 = 256$ ולכן $AB = 16$ ס"מ.

ב. המשולש ABC הוא ישר זווית ולכן שטחו הוא:

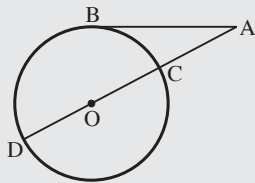
$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96 \text{ סמ"ר}$$

ג. כדי לחשב את שטחי המשולשים ABO ו-AOC אין צורך לחשב גבהים.

הנקודה O היא אמצע BC ולכן AO הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC. נסתמך על כך שתיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים שווים שטח ונקבל:

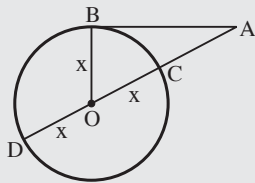
$$S_{ABO} = S_{ACO} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48 \text{ סמ"ר}$$

דוגמא ב':



הקטע AB משיק למעגל שמרכזו O בנקודה B. הקטע AO והמשכו חותכים את המעגל בהתאמה בנקודות C ו-D. נתון: $AB = 12$ ס"מ, $AD = 18$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.

פתרון:



נעביר את הרדיוס BO ונסמן את הרדיוס ב-x. המשולש ABO הוא ישר זווית כי הזווית ABO היא זווית ישרה כזווית בין משיק לרדיוס הנפגשים בנקודת ההשקה. לכן עפ"י משפט פיתגורס $AB^2 + BO^2 = AO^2$. לפי הנתון ולפי הסימון נקבל:

$$12^2 + x^2 = (18-x)^2 \text{ ולכן המשוואה היא } 144 + x^2 = 324 - 36x + x^2 \text{ כלומר } 36x = 180 \text{ ולכן } x = 5.$$

לסיכום: רדיוס המעגל הוא 5 ס"מ.

המשפט ההפוך למשפט פיתגורס

לפני שנעבור לתרגילים נזכיר את המשפט ההפוך למשפט פיתגורס:

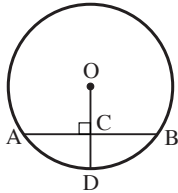
אם במשולש סכום שטחי הריבועים הבנויים על שתי צלעות שווה לשטח הריבוע הבנוי על הצלע השלישית אז המשולש הוא ישר זווית.

(הזווית הישרה נמצאת מול הצלע השלישית שהיא הצלע הגדולה).

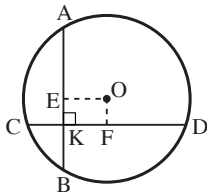
תרגילים (משפט פיתגורס במעגל)

מיתרים וזוויות במעגל – משפט פיתגורס

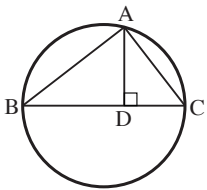
תרגילים יסודיים – מיתרים וזוויות במעגל – משפט פיתגורס



- (1) AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ. הרדיוס OD מאונך למיתר AB וחותך אותו בנקודה C. נתון: $CD = 4$ ס"מ. חשב את אורך המיתר AB.



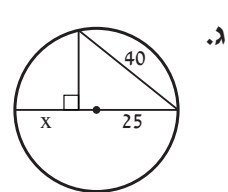
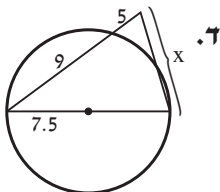
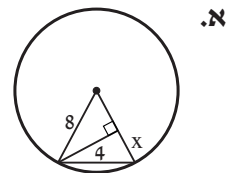
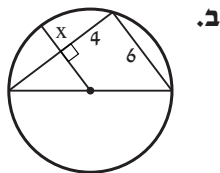
- (2) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O המאונכים זה לזה שנחתכים בנקודה K. הנקודות E ו-F הן אמצעי המיתרים. נתון: $AB = 40$ ס"מ, $EO = 15$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.
ב. נתון: $CD = 48$ ס"מ. חשב את הקטע FO.
ג. חשב את המרחק בין K ל-O.



- (3) המשולש ABC חסום במעגל שרדיוסו 5 ס"מ כך שהצלע BC היא קוטר. AD הוא הגובה לצלע BC. נתון: $AC = 6$ ס"מ. חשב את שטח המשולש.
ב. חשב את הגובה AD.

תרגילים נוספים – מיתרים וזוויות במעגל – משפט פיתגורס

- (4) מצא את הקטע x בציורים הבאים: (הנקודה המודגשת היא מרכז המעגל)



5) ABCD הוא טרפז (שווה שוקיים) החסום במעגל שרדיוסו

13 ס"מ כך שהבסיסים נמצאים בצדדים שונים של מרכז

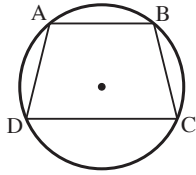
המעגל. נתון: $AB = 10$ ס"מ, $CD = 24$ ס"מ.

א. חשב את: (1) גובה הטרפז.

(2) שטח הטרפז.

ב. ענה על סעיף א' כאשר הבסיסים נמצאים

מאותו צד של מרכז המעגל.



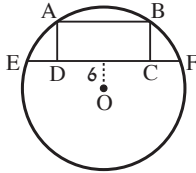
6) ABCD הוא מלבן שקודקדיו A ו-B נמצאים על המעגל

וקודקדיו C ו-D נמצאים על מיתר EF (ראה ציור).

מרחק המיתר EF ממרכז המעגל O הוא 6 ס"מ.

רדיוס המעגל הוא 29 ס"מ ואורך AB הוא 40 ס"מ.

חשב את שטח המלבן.



7) א. ABCD הוא מלבן החסום במעגל. E היא נקודה

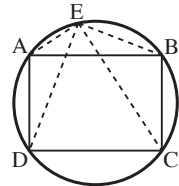
כלשהי על המעגל. הוכח: $AE^2 + CE^2 = BE^2 + DE^2$.

(הערה: טענה זו נכונה גם כאשר הנקודה E לא נמצאת

על המעגל. ראה תרגיל 14 בעמ' 450).

ב. הוכח: סכום ריבועי המרחקים של קודקדי מלבן החסום

במעגל מנקודה על המעגל שווה לפעמיים הקוטר בריבוע.

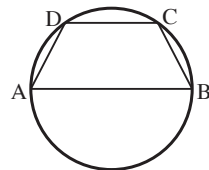


8) ABCD הוא טרפז החסום במעגל שרדיוסו R

כך שהבסיס AB הוא קוטר במעגל.

נתון: $DC = 2a$. הבע באמצעות R ו-a את:

א. שטח הטרפז. ב. היקף הטרפז.



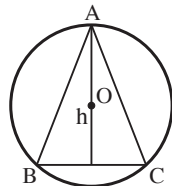
9) משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) חסום במעגל

שמרכזו O ורדיוסו R ($\angle A < 90^\circ$). הגובה לבסיס

הוא h.

א. הבע באמצעות R ו-h את צלעות המשולש ABC.

ב. מצא את הצלעות אם $R = 6.25$ ס"מ ו- $h = 8$ ס"מ.



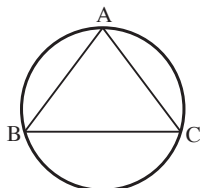
10) משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$)

חסום במעגל. נתון: $AB = 40$ ס"מ,

$BC = 48$ ס"מ.

חשב את רדיוס המעגל החוסם את

המשולש.



המשיק למעגל – משפט פיתגורס

תרגילים יסודיים – המשיק למעגל – משפט פיתגורס

(11) AB משיק למעגל שמרכזו O בנקודה B.

AO חותך את המעגל בנקודה C.

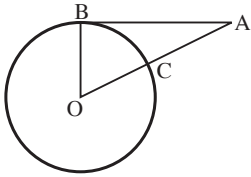
נתון: $AB = 12$ ס"מ, $AC = 8$ ס"מ.

א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. נסמן ב-D את אמצע AO.

חשב את: (1) הקטע BD.

(2) שטח המשולש ABD.



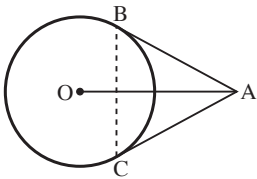
(12) מנקודה A הנמצאת במרחק של 25 ס"מ מהמרכז O של מעגל יוצאים שני משיקים למעגל שאורך כל אחד מהם הוא 20 ס"מ. (B ו-C הן נקודות ההשקה).

א. מצא את רדיוס המעגל.

ב. חשב את שטח המרובע ABOC.

ג. חשב את המרחק בין נקודות ההשקה B ו-C.

(הערה: ניתן להיעזר בשטח משולש).

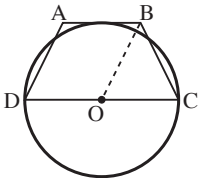


(13) ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

הבסיס DC הוא קוטר במעגל שמרכזו O והבסיס AB משיק למעגל. רדיוס המעגל הוא 12 ס"מ.

נתון: $BO = 13$ ס"מ.

חשב את שטח הטרפז.

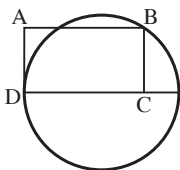


(14) ABCD הוא מלבן. הצלע DC נמצאת על קוטר של המעגל והצלע AD משיקה למעגל בנקודה D.

נתון: $DC = 18$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ.

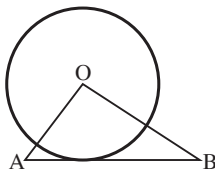
א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. חשב את אורך הקטע המחבר את A עם מרכז המעגל.

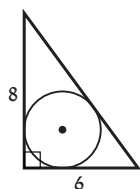


(15) הקטע AB משיק למעגל שמרכזו O. נתון: $AB = 21$ ס"מ, $BO = 20$ ס"מ, $AO = 13$ ס"מ.

חשב את רדיוס המעגל.

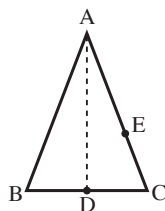


תרגילים נוספים – המשיק למעגל – משפט פיתגורס



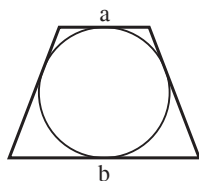
- 16) בתוך משולש ישר זווית שהניצבים שלו הם 6 ס"מ ו-8 ס"מ חסום מעגל.

מצא את רדיוס המעגל החסום.

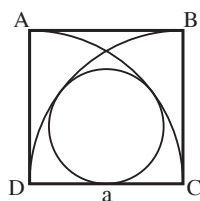


- 17) בתוך משולש שווה שוקיים ABC שבו $AB = AC$ חסום מעגל. (המעגל לא משורטט בציור).
D ו-E הן בהתאמה נקודות ההשקה של AC ו-BC.
א. הוכח שהנקודה D היא אמצע הבסיס BC.
ב. נסמן: $AE = a$, $AD = h$. הבע באמצעות a ו-h את:
(1) רדיוס המעגל החסום. (2) בסיס המשולש ABC.

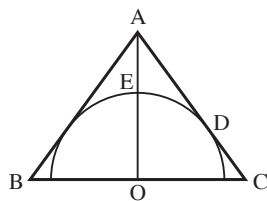
- 18) מצא את רדיוס המעגל החסום במשולש שווה שוקיים שבו השוק היא 10 ס"מ והבסיס הוא 12 ס"מ.



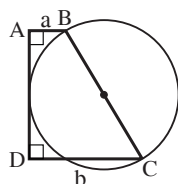
- 19) טרפז שווה שוקיים שבסיסיו הם a ו-b חוסם מעגל שרדיוסו R.
הוכח: $ab = 4R^2$.



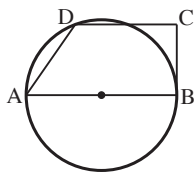
- 20) ABCD הוא ריבוע שצלעו a. הנקודות C ו-D הן בהתאמה המרכזים של רבעי מעגל שהרדיוס שלהם הוא a. המעגל שבציור משיק לשני רבעי המעגל ולצלע DC של הריבוע.
הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.



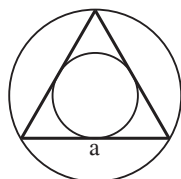
- 21) בתוך משולש ABC שהוא שווה שוקיים ($AB = AC$) חסום חצי מעגל שמרכזו O. D היא אחת מנקודות ההשקה. הקטע AO חותך את קשת חצי המעגל בנקודה E. נתון: $AE = 8$ ס"מ, $AD = 16$ ס"מ.
א. חשב את רדיוס חצי המעגל.
ב. מצא את צלעות המשולש.



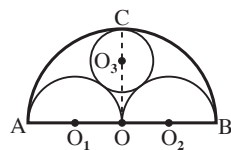
- הערה: תרגילים 22–25 הם קצת יותר קשים מהרגיל.
- 22) ABCD הוא טרפז ישר זווית שהשוק הקצרה שלו משיקה למעגל והשוק הארוכה שלו היא קוטר במעגל.
נסמן: $AB = a$, $DC = b$.
הבע באמצעות a ו-b את היקף הטרפז ואת שטחו.



- (23)** ABCD הוא טרפז. השוק BC משיקה למעגל בנקודה B. הבסיס AB הוא קוטר במעגל והקודקוד D נמצא על המעגל. רדיוס המעגל הוא 25 ס"מ. נתון: $DC = 32$ ס"מ. חשב את השטח וההיקף של הטרפז.



- (24)** המשולש שבציור הוא משולש שווה צלעות שהצלע שלו היא a. נסמן ב-R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש וב-r את רדיוס המעגל החסום במשולש. הוכח:
- א. $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ב. $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$



- (25)** בתוך חצי מעגל שרדיוסו R, מרכזו O וקוטרו AB חסומים שני חצאי מעגל שרדיוסיהם שווים ומרכזיהם הם O_1 ו- O_2 . שני חצאי המעגל נוגעים בחצי המעגל הגדול בנקודות A ו-B ונוגעים זה בזה בנקודה O. מעגל שלישי שמרכזו O_3 נוגע בשני חצאי המעגלים הקטנים ונוגע בחצי המעגל הגדול בנקודה C. הוכח: הקטע CO העובר דרך O_3 מאונך לקוטר AB. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל שמרכזו O_3 .

המשפט ההפוך למשפט פיתגורס – מעגל

- (26)** ABC הוא משולש החסום במעגל. נתון: $AB = 21$ ס"מ, $AC = 20$ ס"מ, $BC = 29$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל. (נמק את תשובתך).

- (27)** AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O ורדיוסו 15 ס"מ. C היא נקודה על המיתר. נתון: $CO = 9$ ס"מ, $AC = 12$ ס"מ. חשב את אורך המיתר AB. (נמק את תשובתך).

תשובות (משפט פיתגורס במעגל):

1. 16 ס"מ. 2. א. 25 ס"מ. ב. 7 ס"מ. ג. 16.55 ס"מ. 3. א. 24 סמ"ר. ב. 4.8 ס"מ. 4. א. 1. ב. 2. ג. 18. ד. 13. 5. א. (1) 17 ס"מ. (2) 289 סמ"ר. ב. (1) 7 ס"מ. (2) 119 סמ"ר. 6. 600 סמ"ר. 8. א. $(R+a)\sqrt{R^2-a^2}$. ב. $2R+2a+2\sqrt{2R^2-2aR}$. 9. א. $AB = AC = \sqrt{2hR}$, $BC = 2\sqrt{2hR-h^2}$. 10. 25 ס"מ.

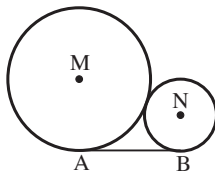
- 11) א. 5 ס"מ. ב. (1) 6.5 ס"מ. (2) 15 סמ"ר. 12) א. 15 ס"מ. ב. 300 סמ"ר.
 ג. 24 ס"מ. 13) 204 סמ"ר. 14) א. 13 ס"מ. ב. 17.69 ס"מ. 16) 2 ס"מ.
 17) א. (1) $\frac{h^2-a^2}{2h}$. (2) $\frac{h^2-a^2}{a}$. 18) 3 ס"מ. 20) $\frac{3}{8}a$. 21) א. 12 ס"מ.
 22) $2\sqrt{ab} + 2(a+b)$, $\sqrt{ab}(a+b)$. 23) 984 סמ"ר, 136 ס"מ. 25) ב. $\frac{R}{3}$. 26) 14.5 ס"מ.
 27) 24 ס"מ.

תרגילים לחזרה – משפט פיתגורס במעגל

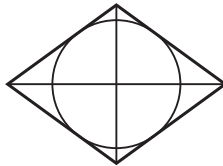
סעיף זה כולל תרגילים לחזרה המבוססים על משפט פיתגורס במעגל.

תרגילים

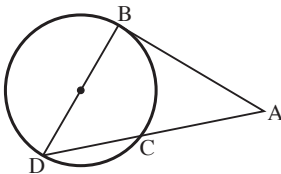
(תרגילים לחזרה – משפט פיתגורס במעגל)



- 1) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N ורדיוסיהם בהתאמה הם 9 ס"מ ו-4 ס"מ משיקים מבחוץ. חשב את אורך המשיק המשותף AB.

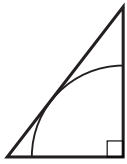


- 2) אלכסונו של מעוין הם 30 ס"מ ו-40 ס"מ. חשב את קוטר המעגל החסום במעוין.

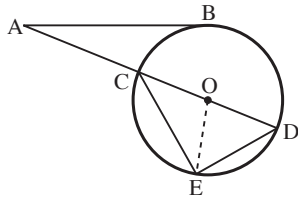


- 3) AB משיק למעגל בנקודה B ו-ACD הוא חותך למעגל כך שהקטע BD הוא קוטר. נתון: $AB = 12$ ס"מ ורדיוס המעגל הוא 4.5 ס"מ. חשב את הקטעים AC ו-DC.

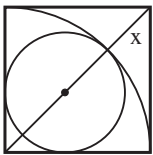
- 4) אחד מהניצבים של משולש ישר זווית הוא 12 ס"מ ורדיוס המעגל החסום בו הוא 2 ס"מ.
 א. מצא את הניצב השני של המשולש.
 ב. מצא את רדיוס המעגל החוסם את המשולש.



- (5) בתוך משולש ישר זווית שהיתר שלו 10 ס"מ חסום רבע מעגל שמרכזו בקודקוד הזווית הישרה ורדיוסו 4.8 ס"מ. (ראה ציור).
מצא את ניצבי המשולש.



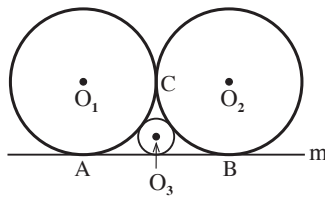
- (6) מהנקודה A יוצאים למעגל שמרכזו O משיק AB וחיתך ACD העובר דרך מרכז המעגל. E נקודה על המעגל. נתון: $AB = 12$ ס"מ, $AD = 18$ ס"מ, $CE = 8$ ס"מ.
חשב את שטח המשולש DOE.



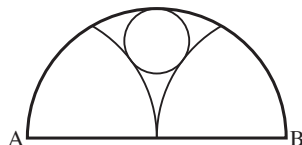
- (7) בתוך ריבוע חסום רבע מעגל שבתוכו חסום מעגל כמתואר בציור. הוכח שהקטע המסומן ב-x שווה לרדיוס המעגל.

- (8) טרפז (שווה שוקיים) חסום במעגל. הבסיסים הם 38 ס"מ ו-58 ס"מ והם עוברים בצדדים שונים של המרכז. כל שוק היא 26 ס"מ.
מצא את רדיוס המעגל.

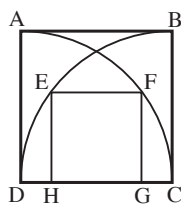
הערה: תרגילים 9–13 הם קצת יותר קשים מהרגיל.



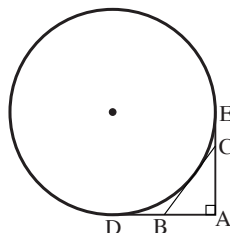
- (9) שני מעגלים שווים שרדיוסיהם R ומרכזיהם O_1 ו- O_2 משיקים לישר m בנקודות A ו-B ומשיקים מבחוץ זה לזה בנקודה C. מעגל שלישי שמרכזו O_3 משיק לשני המעגלים ולישר m.
א. הוכח: CO_3 מאונך ל- O_1O_2 .
ב. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל שמרכזו O_3 .



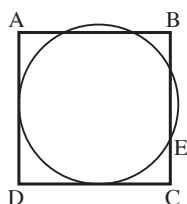
- (10) AB הוא הקוטר של חצי מעגל שרדיוסו R. הנקודות A ו-B הן בהתאמה מרכזי שני מעגלים שרדיוסיהם הם R. (בשרטוט מצוירים רק חלקים משני המעגלים).
הבע באמצעות R את רדיוס המעגל המשיק מבפנים לחצי המעגל ומשיק מבחוץ לשני המעגלים הני"ל.



- 11** ABCD הוא ריבוע שצלעו a. הנקודות C ו-D הן בהתאמה המרכזים של שני רבועי מעגל שהרדיוס שלהם הוא a. המרובע EFGH הוא ריבוע. (ראה ציור). הבע באמצעות a את צלע הריבוע EFGH.

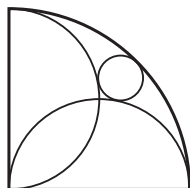


- 12** ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$). המעגל שבציור משיק ליתר BC ולהמשכי הניצבים בנקודות D ו-E. נתון: $AC = 4$ ס"מ, $AB = 3$ ס"מ. א. מצא את הקטעים BD ו-CE. ב. חשב את רדיוס המעגל.



- 13** ABCD הוא ריבוע ששתי צלעות שלו משיקות למעגל ושתי האחרות חותכות את המעגל. אחת מנקודות החיתוך של הצלע BC עם המעגל היא E. נתון: $CE = 8$ ס"מ, $BE = 17$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.

הערה: תרגיל 14 הוא קשה במיוחד.



- 14** לרבע מעגל שהרדיוס שלו 2R משיקים מבפנים שני חצאי מעגל שהרדיוס של כל אחד מהם הוא R כמתואר בציור. הבע באמצעות R את הרדיוס של המעגל שמשקם מבחוץ לשני חצאי המעגל ומשיק מבפנים לרבע המעגל.

תשובות (תרגילים לחזרה – משפט פיתגורס במעגל):

- (1) 12 ס"מ. (2) 24 ס"מ. (3) 9.6 ס"מ, 5.4 ס"מ. (5) 6 ס"מ, 8 ס"מ. (6) 12 סמ"ר.
 (8) 29.07 ס"מ. (9) ב. $\frac{R}{4}$. (10) $\frac{R}{4}$. (11) $\frac{3}{5}a$. (12) א. 3 ס"מ, 2 ס"מ. ב. 6 ס"מ.
 (13) 13 ס"מ. (14) $R \cdot \frac{4-2\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}}$.

פרק שלושה עשר

הנדסת המישור –

היקף המעגל ושטחו

היקף המעגל ושטחו, אורך קשת ושטח גיזרה

בספר מתמטיקה חלק א' מופיעים הנושאים היקף המעגל, שטח המעגל, אורך קשת ושטח גיזרה. נזכיר את הנוסחאות העיקריות.

ההיקף והשטח של מעגל, אורך קשת ושטח גיזרה:

$P = 2 \pi R$	$(\pi \approx 3.14)$	ההיקף P של מעגל שרדיוסו R הוא:
$S = \pi R^2$		השטח S של מעגל שרדיוסו R הוא:
$\ell = \frac{\pi R \cdot \alpha}{180}$		האורך ℓ של קשת המתאימה לזווית מרכזית α במעגל שרדיוסו R הוא:
$S = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360}$		השטח S של גיזרה המתאימה לזווית מרכזית α במעגל שרדיוסו R הוא:

תרגילים

(היקף המעגל ושטחו, אורך קשת ושטח גיזרה)

תרגילים יסודיים – היקף המעגל ושטחו, אורך קשת ושטח גיזרה

הערה: ראה גם תרגילים בספר מתמטיקה חלק א'.

היקף המעגל ושטחו

1) חשב את היקפו ושטחו של מעגל שרדיוסו 10 ס"מ.

(2) היקפו של מעגל הוא 12π ס"מ. חשב את שטחו.

(3) שטחו של מעגל הוא 49π סמ"ר. חשב את היקפו.

אורך קשת

(4) נתון מעגל שרדיוסו 6 ס"מ.

חשב את אורך הקשת המתאימה לזווית המרכזית בת 72° .

(5) נתון מעגל ששטחו 25π סמ"ר.

חשב את הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה 3.5π ס"מ.

(6) מהו היקפו של חצי מעגל שרדיוסו R ?

(7) מהו היקפו של $\frac{3}{4}$ מעגל שרדיוסו R ?

שטח גיזרה

(8) נתון מעגל שרדיוסו 9 ס"מ.

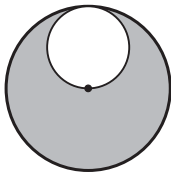
חשב את שטח הגיזרה שהזווית המרכזית שלה היא 100° .

(9) נתון מעגל שהיקפו 20π ס"מ.

חשב את הזווית המרכזית של גיזרה אם שטחה הוא 45π סמ"ר.

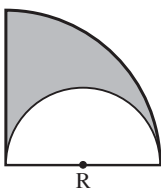
(10) המעגל הקטן משיק למעגל הגדול ועובר דרך מרכזו. רדיוס המעגל הגדול הוא R.

הבע באמצעות R את ההיקף (כולל החלק הפנימי) של הצורה האפורה ואת שטחה.

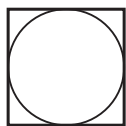


(11) בתוך רבע מעגל שרדיוסו R בנו חצי מעגל שקוטרו מתלכד עם רדיוס רבע המעגל.

הבע באמצעות R את ההיקף והשטח של הצורה האפורה.



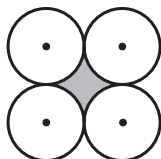
תרגילים נוספים – היקף המעגל ושטחו, אורך קשת ושטח גיזרה



12) חשב את היחס בין שטח

המעגל החסום בריבוע

לבין שטח הריבוע.



13) נתונים 4 מעגלים שווים בעלי רדיוס R

המשיקים מבחוץ כמתואר בציור.

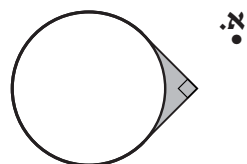
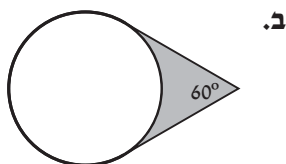
הבע באמצעות R את שטח הצורה

האפורה.

14) כמו בתרגיל הקודם אבל נתונים 3 מעגלים.

15) מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני משיקים למעגל שרדיוסו R.

הבע באמצעות R את ההיקף והשטח של הצורה הנמצאת בין שני המשיקים והמעגל:



16) בתוך גזרה שהיא חלק ממעגל שרדיוסו R חסום מעגל

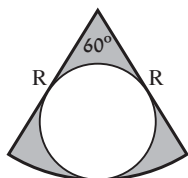
הנוגע ברדיוסים ובקשת הגזרה. הזווית המרכזית של

הגזרה היא 60° .

א. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל החסום בגזרה.

ב. הבע באמצעות R את ההיקף (כולל הפנימי) והשטח

של הצורה האפורה.



תשובות (היקף המעגל ושטחו, אורך קשת ושטח גיזרה):

1) 62.83 ס"מ (20π) ס"מ, 314.16 סמ"ר (100π) סמ"ר. 2) 113.10 סמ"ר. (36π) סמ"ר.

3) 43.98 ס"מ. (14π) ס"מ. 4) 2.4π ס"מ. 5) 126° . 6) $2R + \pi R$. 7) $2R + \frac{3}{2}\pi R$.

8) 22.5π סמ"ר. 162° . 9) $3\pi R$, $\frac{3}{4}\pi R^2$. 10) $\pi R + R$, $\frac{\pi}{8}R^2$. 11) $\frac{\pi}{4}$.

12) $\frac{R}{3}$. 13) $4R^2 - \pi R^2$. 14) $\sqrt{3}R^2 - \frac{\pi}{2}R^2$. 15) $\frac{2\pi R}{3} + 2\sqrt{3}R$, $\sqrt{3}R^2 - \frac{\pi R^2}{3}$. 16) $\frac{R}{3}$.

ב. $2R + \pi R$, $\frac{\pi}{18}R^2$.

מקטע, טבעת

מקטע

הגדרה:



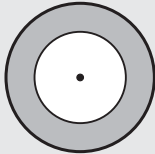
מקטע – חלק מהמעגל המוגבל בין מיתר לקשת המתאימה לו נקרא מקטע.

לדוגמא – החלק האפור שבציור הוא מקטע.

הערה: כדי לחשב שטח של מקטע מחסרים משטח הגיזרה המתאימה למיתר את שטח המשולש המוגבל ע"י המיתר ושני הרדיוסים של הגיזרה.

טבעת

הגדרה:



טבעת – צורה המוגבלת בין שני מעגלים בעלי מרכז משותף נקראת טבעת.

לדוגמא – בציור משמאל החלק האפור מייצג טבעת.

שטח טבעת מתקבל ע"י חיסור שטח המעגל הפנימי משטח המעגל החיצוני.

משפט:

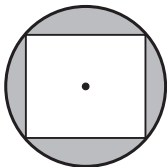
שטח טבעת המוגבלת בין שני מעגלים שהרדיוסים שלהם הם r ו- R

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 \quad \text{הוא:} \quad (r < R)$$

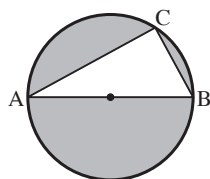
תרגילים (מקטע, טבעת)

מקטע

תרגילים יסודיים – מקטע



- בתוך מעגל חסום מלבן ששתי צלעות סמוכות שלו הן 6 ס"מ ו-8 ס"מ.
א. חשב את רדיוס המעגל.
ב. חשב את ההיקף (כולל הפנימי) והשטח של הצורה האפורה.



(2) המשולש ABC חסום במעגל

כך שהצלע AB היא קוטר.

נתון: $AC = 12$ ס"מ,

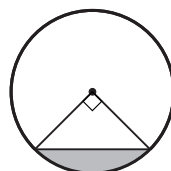
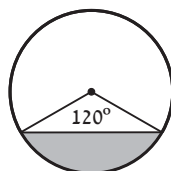
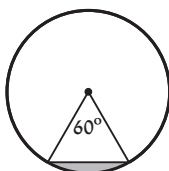
$BC = 5$ ס"מ.

חשב את ההיקף (כולל הפנימי)

ואת השטח של הצורה האפורה.

תרגילים נוספים – מקטע

(3) הבע באמצעות הרדיוס R את ההיקף והשטח של המקטע: (מרכז המעגל מודגש)



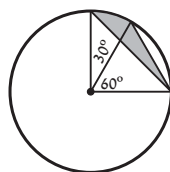
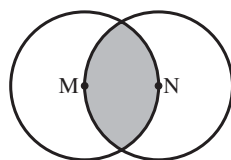
(4) בציר נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס R

שמרכזיהם M ו-N. כל מעגל חותך את

השני במרכזו.

הבע באמצעות R את ההיקף והשטח של

הצורה האפורה.



(5) הבע באמצעות רדיוס המעגל

R את ההיקף והשטח של

הצורה האפורה. (מרכז

המעגל מודגש).

טבעת

תרגילים יסודיים – טבעת

(6) חשב את שטחה של טבעת שרדיוס המעגל הפנימי שלה הוא 3 ס"מ ורדיוס המעגל החיצוני

שלה הוא 8 ס"מ.

(7) שטחה של טבעת הוא 33π סמ"ר. רדיוס המעגל הפנימי הוא 4 ס"מ.

מצא את רדיוס המעגל החיצוני.

8) נתונה טבעת. ידוע שרדיוס המעגל החיצוני גדול ב-4 ס"מ מרדיוס המעגל הפנימי.

בכמה גדול היקף החיצוני של הטבעת מההיקף הפנימי שלה?

תרגילים נוספים – טבעת

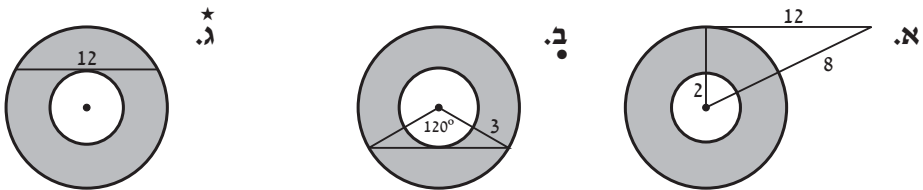
9) נתונה טבעת. סכום הרדיוסים של המעגלים הוא 8 ס"מ וההפרש בין הרדיוסים הוא

3 ס"מ.

מצא את שטח הטבעת מבלי למצוא את הרדיוסים.

10) מצא את השטחים של הטבעות שבציורים הבאים:

(בציור א' ישר משיק למעגל החיצוני ובציורים ב' ו-ג' למעגל הפנימי).



11) שני המעגלים שבציור הם בעלי מרכז משותף O.

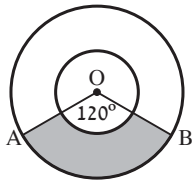
רדיוס המעגל החיצוני גדול פי 2 מרדיוס המעגל

הפנימי שהוא R. נתון: $\angle AOB = 120^\circ$.

א. הבע באמצעות R את היקף של הצורה האפורה.

ב. הוכח: שטח הצורה האפורה שווה לשטח

המעגל הפנימי.



תשובות (מקטע, טבעת):

1) א. 5 ס"מ. ב. $10\pi + 28$ ס"מ, $25\pi - 48$ סמ"ר. 2) $13\pi + 30$ ס"מ, $42.25\pi - 30$ סמ"ר.

3) א. $\sqrt{2}R + \frac{\pi}{2}R$, $\frac{\pi}{4}R^2 - \frac{R^2}{2}$. ב. $\sqrt{3}R + \frac{2}{3}\pi R$, $\frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$. 4) $\frac{4}{3}\pi R$, $\frac{2}{3}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$.

5) $R + \frac{\pi}{6}R + \sqrt{2}R$, $\frac{\pi}{12}R^2 - \frac{R^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$. 6) 55π סמ"ר. 7) 7 ס"מ. 8) 8π ס"מ.

9) 24π סמ"ר. 10) א. 21π . ג. 36π . 11) א. $2R + 2\pi R$.

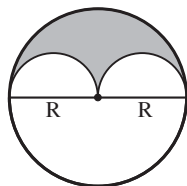
תרגילים לחזרה – היקף המעגל ושטחו

סעיף זה כולל תרגילים לחזרה על כל הפרק של היקף המעגל ושטחו.

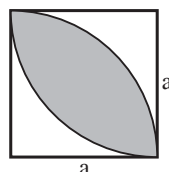
תרגילים

(תרגילים לחזרה – היקף המעגל ושטחו)

תרגילים יסודיים – תרגילים לחזרה – היקף המעגל ושטחו



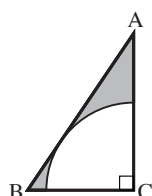
- (1) על קוטר של מעגל שרדיוסו R בנויים שני חצאי מעגלים זהים כמתואר בציור. הבע באמצעות R את ההיקף והשטח של הצורה האפורה.



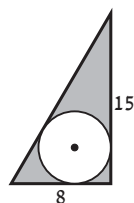
- (2) בתוך ריבוע שצלעו a עוברות שתי קשתות של רבע מעגל. הבע באמצעות a את היקף הצורה האפורה. ב. הבע באמצעות a את שטח הצורה האפורה.

- (3) בתוך מעגל חסום מלבן ששתי צלעות סמוכות שלו הן a ו- b . הוכח: סכום שטחי ארבעת המקטעים שבין המעגל למלבן הוא: $ab - \frac{\pi}{4}(a^2 + b^2)$.

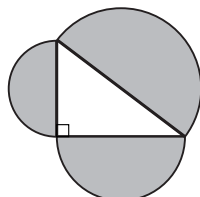
תרגילים נוספים – תרגילים לחזרה – היקף המעגל ושטחו



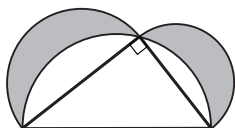
- (4) במשולש ישר זווית ABC חסום רבע מעגל כמתואר בציור. נתון: $AB = 10$ ס"מ, $AC = 8$ ס"מ. א. חשב רדיוס רבע המעגל. ב. חשב את השטח של הצורה האפורה.



- (5) בתוך משולש ישר זווית שהניצבים שלו 15 ס"מ ו-8 ס"מ חסום מעגל. א. חשב את רדיוס המעגל. ב. חשב את השטח של הצורה האפורה.



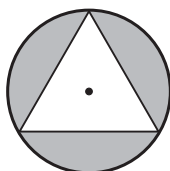
- (6) על הצלעות של משולש ישר זווית בנו חצאי מעגלים כמתואר בציור. הוכח: סכום שטחי חצאי המעגלים שבנויים על הניצבים שווה לשטח חצי המעגל שבנוי על היתר.



- 7) על צלעותיו של משולש ישר זווית בנו חצאי מעגלים.

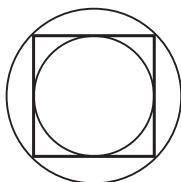
הוכח: השטח האפור שווה לשטח המשולש.

- 8) שטח טבעת הוא 72π סמ"ר. היחס בין רדיוסי המעגלים היוצרים את הטבעת הוא 3 : 1. חשב את רוחב הטבעת. (ההפרש בין הרדיוסים).

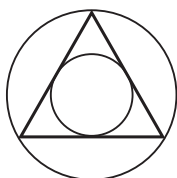


- 9) בתוך מעגל שרדיוסו R חסום משולש שווה צלעות. הוכח:

- א. צלע המשולש היא $\sqrt{3}R$.
 ב. שטח המשולש הוא $\frac{\sqrt{27}}{4}R^2$.
 ג. השטח האפור הוא $\pi R^2 - \frac{\sqrt{27}}{4}R^2$.



- 10) בציור נתונים ריבוע, מעגל החוסם את הריבוע ומעגל החסום בריבוע. חשב את היחס בין שטח המעגל החוסם לשטח המעגל החסום. הוכח: שטח הטבעת שבין שני המעגלים שווה לשטח המעגל הפנימי.



- 11) בציור נתונים משולש שווה צלעות, מעגל החוסם את המשולש ומעגל החסום במשולש. חשב את היחס בין שטח המעגל החוסם לשטח המעגל החסום והראה שהוא 4 : 1.

תשובות (תרגילים לחזרה – היקף המעגל ושטחו):

- 1) $2\pi R$, $\frac{\pi}{4}R^2$ 2) א. πa ב. $\frac{\pi}{2}a^2 - a^2$ 4) א. 4.8 ס"מ. ב. $24 - 5.76\pi$ סמ"ר.
 5) א. 3 ס"מ. ב. $60 - 9\pi$ סמ"ר. 8) 6 ס"מ.

פרק ארבעה עשר

הנדסת המישור –

פרופורציה ותכונת חוצה זווית של משולש במעגל, דמיון משולשים במעגל

פרופורציה ותכונת חוצה זווית של משולש במעגל

בספר מתמטיקה חלק א' מופיעים בצורה מפורטת הנושאים: **פרופורציה** (משפט תלס והרחבותיו), **תכונת חוצה זווית במשולש**, **דמיון משולשים**. בפרק זה נדון בנושאים הנ"ל **במעגל**. הנושא תכונת חוצה זווית חיצונית למשולש הוא לא בתוכנית הלימודים.

סיכום המושגים והמשפטים העיקריים:

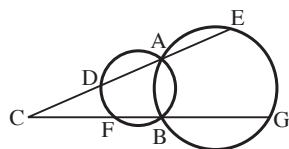
משפט תלס והמשפט ההפוך – שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים ולהיפך.
חלוקה פנימית של קטע – נקודה C הנמצאת על קטע AB מחלקת אותו חלוקה פנימית ביחס של $\frac{n}{m}$ אם מתקיים $\frac{AC}{CB} = \frac{n}{m}$.
חלוקה חיצונית של קטע – נקודה C הנמצאת על המשך של קטע AB מחלקת אותו חלוקה חיצונית ביחס של $\frac{n}{m}$ אם מתקיים $\frac{AC}{CB} = \frac{n}{m}$.
משפט – חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית חלוקה פנימית ביחס השווה ליחס שבין שתי הצלעות הכולאות את הזווית ולהיפך.

תרגילים

(פרופורציה ותכונת חוצה זווית של משולש במעגל)

משפט תלס והרחבותיו והמשפט ההפוך במעגל

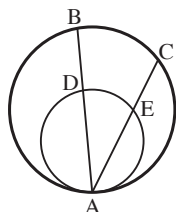
הערה: ראה גם תרגילים בספר מתמטיקה חלק א'.



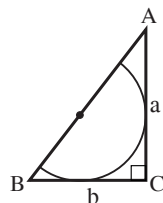
- (1) שני המעגלים שבציור נחתכים בנקודות A ו-B. CDA ו-CFB הם חותכים למעגל השמאלי שחותכים את המעגל הימני גם בנקודות E ו-G בהתאמה.

א. הוכח: $DF \parallel EG$.

ב. הוכח: $\frac{CD}{DE} = \frac{CF}{FG}$.

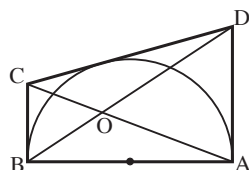


- (2) שני המעגלים שבציור משיקים מבפנים בנקודה A. AC ו-AB הם מיתרים במעגל הגדול שחותכים את המעגל הקטן בנקודות D ו-E בהתאמה. הוכח: $AD \cdot CE = AE \cdot BD$.

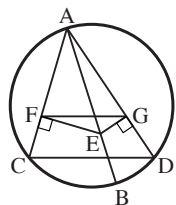


- (3) ABC הוא משולש ישר זווית ($AC \perp BC$) שבו חסום חצי מעגל שמרכזו על היתר כמתואר בציור.

הבע את רדיוס חצי המעגל באמצעות הניצבים a ו-b.

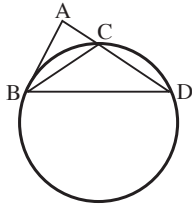


- (4) מרובע ABCD חוסם חצי מעגל כך שהצלע AB היא קוטר והצלעות BC, CD ו-DA משיקות לקשת חצי המעגל. אלכסוני המרובע נחתכים בנקודה O. רדיוס חצי המעגל הוא 6 ס"מ ואורך הצלע CD הוא 13 ס"מ. ($BC < AD$). חשב את היחס $CO:OA$.



- (5) AB הוא קוטר במעגל ו-ACD הוא משולש החסום במעגל. E, F ו-G הן בהתאמה נקודות על AC, AB ו-AD. נתון: $EG \perp AD$, $EF \perp AC$. הוכח: $FG \parallel CD$.

תכונת חוצה זווית של משולש והמשפט ההפוך במעגל

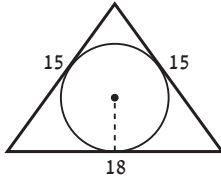


6) מהנקודה A יוצאים משיק (AB)

למעגל בנקודה B וחיתך ACD.

נתון: $BC = DC$.

הוכח: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BC}$.

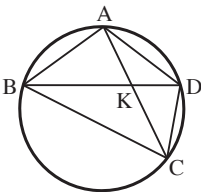


7) במשולש שווה שוקיים הבסיס הוא

18 ס"מ והשוק היא 15 ס"מ.

חשב את רדיוס המעגל החסום

במשולש בעזרת תכונת חוצה הזווית במשולש.



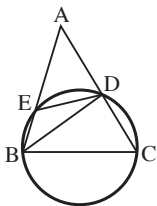
8) במרובע ABCD שחסום במעגל

האלכסונים נחתכים בנקודה K.

נתון: $\frac{BC}{CD} = \frac{BK}{KD}$.

א. הוכח: $\angle ABD = \angle ACB$.

ב. הוכח: $\angle BKC - \angle BKA = \angle BAK - \angle DAK$.



9) הנקודות B, C, D ו-E נמצאות על

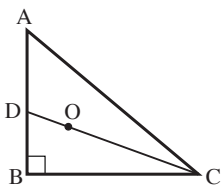
המעגל. המשכי המיתרים BE ו-CD

נפגשים בנקודה A. BD הוא חוצה הזווית

B במשולש ABC. נתון: $DE = 6$ ס"מ,

$BC = 9$ ס"מ, $AB = 12$ ס"מ.

חשב את AC.



10) הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש

ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$). הנקודה D נמצאת

על הניצב AB כך שהקטע CD עובר דרך הנקודה O.

נתון: $BC = 12$ ס"מ, $BD = 4$ ס"מ.

א. חשב את AD.

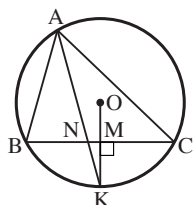
ב. חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC.

11) AD הוא הגובה לבסיס BC במשולש שווה שוקיים ABC שבו $AB = AC$. על AD

נמצאת נקודה O. נתון: $BC = 16$ ס"מ, $AO = 10.2$ ס"מ, $DO = 4.8$ ס"מ.

א. הוכח: הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

ב. מהו מרחק הנקודה O מהצלע AB? נמק.



12 המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

KO הוא רדיוס החותך את הצלע BC

בנקודה M והוא מאונך לה. המיתר AK

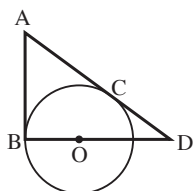
חותך את הצלע BC בנקודה N. נתון:

8 ס"מ $AB =$, 12 ס"מ $AC =$, 10 ס"מ $BC =$.

א. חשב את NM.

ב. נסמן ב-P את מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

חשב את היחס: $\frac{NP}{PA}$. נמק.



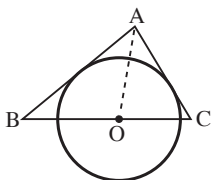
13 AB ו-AC הם משיקים למעגל שמרכזו O

בנקודות B ו-C. המשך BO והמשך AC

נחתכים בנקודה D. נתון: 12 ס"מ $AB =$,

8 ס"מ $CD =$.

חשב את רדיוס המעגל.



14 הצלעות AB ו-AC של משולש ABC משיקות

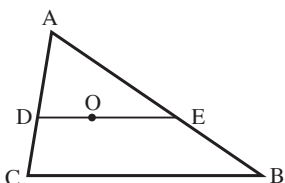
למעגל שמרכזו O. הצלע BC עוברת דרך

המרכז O. נתון: 14 ס"מ $AB =$, 10 ס"מ $AC =$.

א. חשב את היחס: $\frac{S_{ABO}}{S_{ACO}}$.

ב. נתון: 60 סמ"ר S_{ABC} . חשב את רדיוס המעגל.

הערה: תרגילים 15–17 הם קצת יותר קשים מהרגיל.



15 הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

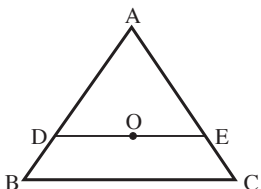
דרך O עובר קטע המקביל לצלע BC שחותך את

הצלעות AC ו-AB בנקודות E ו-D. נתון:

5 ס"מ $AD =$, 10 ס"מ $AE =$, 9 ס"מ $DE =$.

א. חשב את הקטעים DO ו-EO.

ב. חשב את BC.



16 הנקודה O היא מרכז המעגל החסום את

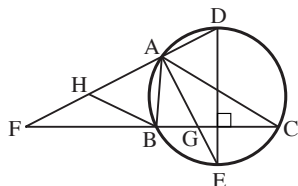
המשולש ABC שהוא שווה שוקיים ($AB = AC$).

דרך O עובר קטע המקביל לבסיס BC

שחותך את השוקיים בנקודות D ו-E.

נתון: 20 ס"מ $AB =$, 24 ס"מ $BC =$.

חשב את הקטע DE.



- 17 המשולש ABC חסום במעגל. DE הוא קוטר המאונך לצלע BC. המשך AD והמשך BC נפגשים בנקודה F. AE חותך את BC בנקודה G. H היא נקודה על AF כך שמתקיים: $BH \parallel AC$. א. הוכח: $BH = AB$. (רמז: ניתן לראות רמז בתשובה לתרגיל). ב. הוכח: $\frac{BG}{GC} = \frac{FB}{FC}$.

תשובות (פרופורציה ותכונת חוצה זווית של משולש במעגל):

- 3) $\frac{ab}{a+b}$. 4) 9:4. 7) 4.5 ס"מ. 9) 14 ס"מ. 10) א. 5 ס"מ. ב. 3 ס"מ. 12) א. 1 ס"מ. ב. $\frac{1}{2}$. 13) 6 ס"מ. 14) א. $\frac{7}{5}$. ב. 5 ס"מ. 15) א. 3 ס"מ, 6 ס"מ. ב. 14.4 ס"מ. 16) 18.75 ס"מ. 17) א. רמז: זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה.

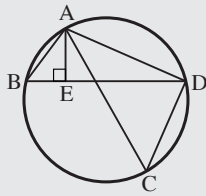
דמיון משולשים במעגל – מיתרים וזוויות

נעבור לדון בדמיון משולשים במעגל. תחילה נדון בבעיות הקשורות למיתרים וזוויות.

סיכום המושגים והמשפטים העיקריים:

משולשים דומים – שני משולשים שבהם שווה בהתאמה שלוש הזוויות ושלוש הצלעות פרופורציוניות.
משפט דמיון ראשון (צלע, זווית, צלע) – אם בשני משולשים שתי צלעות פרופורציוניות והזווית ביניהן שווה בהתאמה אז המשולשים דומים.
משפט דמיון שני (זווית, זווית) – אם בשני משולשים שתי זוויות שוות בהתאמה אז המשולשים דומים.
משפט דמיון שלישי (צלע, צלע, צלע) – אם בשני משולשים שלוש הצלעות פרופורציוניות אז המשולשים דומים.
משפט – במשולשים דומים חוצי זוויות מתאימות, תיכונים מתאימים, גבהים מתאימים וההיקפים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.
משפט – שטחי משולשים דומים מתייחסים זה לזה כריבוע יחס הדמיון.

דוגמא:



הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על המעגל. AC הוא קוטר. הנקודה E נמצאת על המיתר BD. נתון: $AE \perp BD$.
א. הוכח: $\triangle AEB \sim \triangle ADC$.
ב. נתון: $AB = 6$ ס"מ, $BE = 4$ ס"מ, $DC = 10$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.

פתרון:

א. נוכיח שהמשולשים AEB ו-ADC דומים.

$$\left. \begin{array}{l} \angle AEB = 90^\circ \quad (\text{נתון } AE \perp BD) \\ \angle ADC = 90^\circ \quad (\text{זווית היקפית הנשענת על הקוטר AC}) \end{array} \right\} \text{ שלב א': } \\ \Downarrow \\ \angle AEB = \angle ADC$$

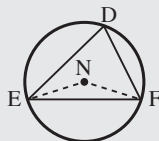
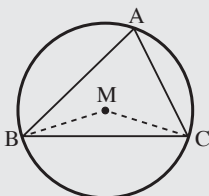
$$\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle C \quad (\text{זווית היקפית הנשענת על אותה הקשת AD}) \\ \angle AEB = \angle ADC \quad (\text{הוכחנו בשלב א'}) \end{array} \right\} \text{ שלב ב': } \\ \Downarrow \\ \triangle AEB \sim \triangle ADC \quad (\text{עפ"י משפט הדמיון ז.ז.})$$

ב. מהדמיון נקבל: $\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DC}$. אם נציב את הנתונים ונסמן $AC = x$ נקבל $\frac{6}{x} = \frac{4}{10}$. פתרון המשוואה הוא $x = 15$ ולכן הרדיוס הוא 7.5 .
 $\frac{AC}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$.
לסיכום: רדיוס המעגל הוא 7.5 ס"מ.

ננסה עכשיו את המשפט המתייחס לרדיוסים של מעגלים החוסמים משולשים דומים.

משפט:

הרדיוסים של מעגלים החוסמים משולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון שבין המשולשים.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

נתון: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

M מרכז המעגל החוסם את $\triangle ABC$

N מרכז המעגל החוסם את $\triangle DEF$

$$\text{צ"ל: } \frac{BM}{EN} = \frac{BC}{EF}$$

הוכחה:

נוכיח שהמשולשים BMC ו-ENF דומים:

$$\left. \begin{array}{l} \angle BMC = 2\angle A \\ \angle ENF = 2\angle D \quad (\text{כנ"ל}) \\ \angle A = \angle D \quad (\text{זוויות מתאימות במשולשים דומים}) \end{array} \right\} \text{שלב א':}$$

$$\Downarrow$$

$$\angle BMC = \angle ENF$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{BM}{EN} = \frac{CM}{FN} \quad (\text{כי } BM = CM \text{ וכן } EN = FN) \\ \angle BMC = \angle ENF \quad (\text{הוכחנו בשלב א'}) \end{array} \right\} \text{שלב ב':}$$

$$\Downarrow$$

$$\triangle BMC \sim \triangle ENF \quad (\text{עפ"י משפט הדמיון צ.ז.צ.})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{BM}{EN} = \frac{BC}{EF} \quad (\text{במשולשים דומים הצלעות המתאימות פרופורציוניות})$$

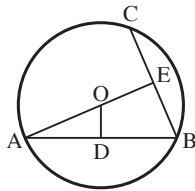
מש"ל.

תרגילים

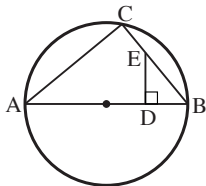
(דמיון משולשים במעגל – מיתרים וזוויות)

תרגילים יסודיים – דמיון משולשים במעגל – מיתרים וזוויות

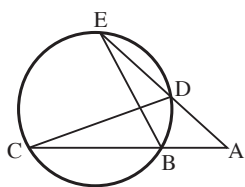
הערה: ראה גם תרגילים בספר מתמטיקה חלק א'.



- (1) AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.
 הנקודות D ו-E הן בהתאמה אמצעי המיתרים
 AB ו-BC. הקטע AE עובר דרך המרכז O.
 הוכח: א. $OD \perp AB$, $AE \perp BC$.
 ב. $\triangle ADO \sim \triangle AEB$.



- (2) משולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.
 D ו-E הן נקודות על הצלעות AB ו-BC כך
 שמתקיים: $DE \perp AB$.
 א. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle EBD$.
 ב. נתון שרדיוס המעגל הוא 15 ס"מ. אורך BE הוא
 12 ס"מ ואורך CE הוא 8 ס"מ. חשב את AD.



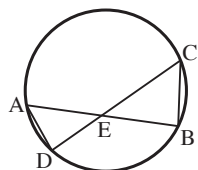
3) מהנקודה A יוצאים שני חותכים למעגל ABC ו-ADE.

א. הוכח: $\triangle ADC \sim \triangle ABE$.

ב. נתון: $AD = 3$ ס"מ, $DE = 5$ ס"מ.

ג. חשב את BC.

ד. חשב את היחס $\frac{S_{ADC}}{S_{ABE}}$.

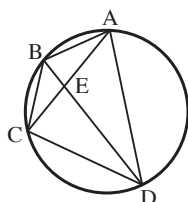


4) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל הנחתכים בנקודה E.

א. הוכח: $\triangle ADE \sim \triangle CBE$.

ב. נתון: $AD = 8$ ס"מ, $AE = 12$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ.

מצא עפ"י הנתונים הנ"ל את הקטע שניתן לחשב את אורכו וחשב את אורכו.



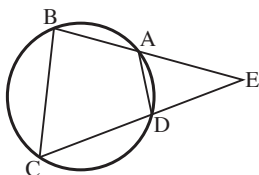
5) דרך הנקודות A, B, C ו-D עובר מעגל.

הנקודה B היא אמצע הקשת AC. הוכח:

א. $\triangle ADE \sim \triangle BDC$.

ב. $\triangle ABD \sim \triangle ECD$.

ג. $\triangle ABE \sim \triangle DBA$.



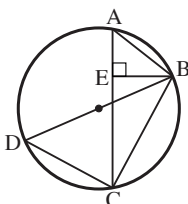
6) המרובע ABCD חסום במעגל. המשכי

הצלעות AB ו-DC נחתכים בנקודה E.

א. הוכח: $\triangle ADE \sim \triangle CBE$.

ב. נתון: $AE = 6$ ס"מ, $AB = 4$ ס"מ.

ג. חשב את DE.



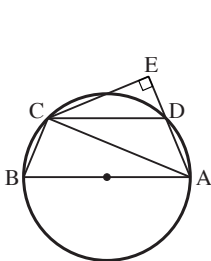
7) הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על המעגל.

BD הוא קוטר. הקטע BE מאונך למיתר AC.

א. הוכח: $\triangle ABE \sim \triangle DBC$.

ב. נתון: $AB = 5$ ס"מ, $DC = 12$ ס"מ.

ג. חשב את AE ו-BE.



8) המרובע ABCD חסום במעגל כך שהצלע AB היא קוטר.

הנקודה E נמצאת על המשך הצלע AD כך ש-CE מאונך ל-AE.

א. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle CDE$.

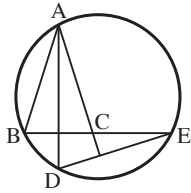
ב. נתון שרדיוס המעגל הוא R והקטע CD הוא a.

הבע באמצעות R ו-a את היחס $\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}$.

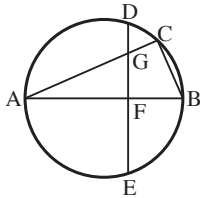
ג. מה ניתן לומר על המרובע ABCD אם נתון ש-CD

חוצה את הזווית ACE? הוכח את תשובתך.

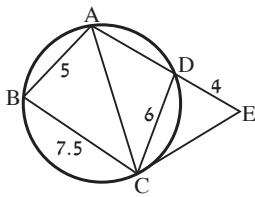
תרגילים נוספים – דמיון משולשים במעגל – מיתרים וזוויות



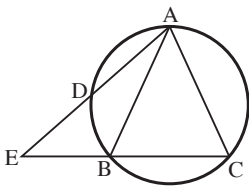
- 9 הנקודות A, B, D ו-E נמצאות על המעגל. המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). המיתר AD חוצה את הבסיס BC. הנקודה E נמצאת על המשך הבסיס BC. א. הוכח: $AC \perp DE$.
 ב. נסמן ב-F את החיתוך של המשך AC עם DE. הוכח: $AD \cdot FC = DF \cdot CE$.



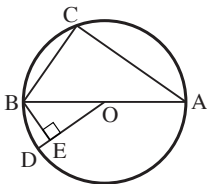
- 10 המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AB היא קוטר. הקוטר DE חוצה את המיתר AC בנקודה G. המיתר DE חותך את הצלע AC בנקודה G. נתון: $AG = 6$ ס"מ, $GC = 1.5$ ס"מ, $BF = 4$ ס"מ. א. מצא את AF ואת רדיוס המעגל.
 ב. נסמן ב-S את שטח המשולש ABC. הבע באמצעות S את שטח המרובע CFBG.



- 11 המרובע ABCD חסום במעגל. הנקודה E נמצאת על המשך הצלע AD. א. היעזר בנתונים שבציור והוכח: $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.
 ב. נתון: $AC = 8$ ס"מ. חשב את CE.
 ג. נסמן: $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCE = \beta$. הבע באמצעות α ו- β את הזוויות הבאות:
 (1) $\angle ACB$. (2) $\angle ACD$.



- 12 המשולש ABC שחסום במעגל הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). הנקודה D היא נקודה כלשהי על הקשת הקטנה בין A ל-B. המשך המיתר AD נפגש עם המשך הבסיס BC בנקודה E. א. הוכח: $\triangle ADB \sim \triangle ABE$.
 ב. נתון: $AC = 12$ ס"מ, $DE = 7$ ס"מ. חשב את AD.
 ג. נסמן ב-S את שטח המשולש BDE. הבע באמצעות S את שטחי המשולשים ADB ו-ABE.

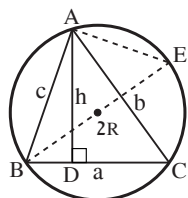


- 13 AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. הנקודות C ו-D נמצאות על המעגל מצדדים שונים של הנקודה B. הנקודה E נמצאת על DO. נתון: $\widehat{BC} = 2\widehat{BD}$, $BE \perp DO$. א. הוכח: AB חוצה את הזווית EBC.
 ב. מצא פי כמה גדול שטח המשולש AOC משטח המשולש OBE.
 ג. המשך BE חותך את המעגל בנקודה נוספת שנסמן אותה ב-F. הוכח: $CF \perp AB$.

- 14)** משולש שווה שוקיים ABC בעל זווית ראש חדה שבו $AB = AC$ חסום במעגל שמרכזו O . AD הוא קוטר במעגל שחותך את הבסיס BC בנקודה E . F היא נקודה על השוק AC כך ש- FO מאונך ל- AC .
 א. נתון: $AE = 6.4$ ס"מ, $DE = 3.6$ ס"מ. חשב את AF .
 ב. חשב את שטח המשולש AOF .

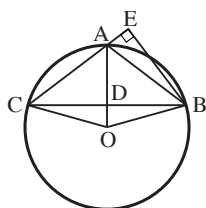
- 15)** ABC הוא משולש ישר זווית שבו $AB \perp BC$. D ו- E הן נקודות על הצלעות AC ו- BC בהתאמה. נתון: $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.
 הוכח:
 א. את המרובע $ABED$ אפשר לחסום במעגל.
 ב. $DE < AB$.
 ג. $\angle AEB = \angle ADB$.

הערה: תרגילים 16–19 הם קצת יותר קשים מהרגיל.

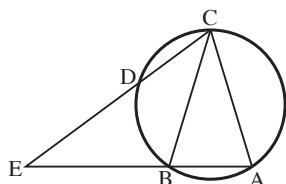


- 16)** משולש חד זווית ABC שצלעותיו הן a, b ו- c חסום במעגל שרדיוסו R . AD הוא הגובה h לצלע BC . BE הוא קוטר במעגל.
 א. הוכח: $\triangle ADC \sim \triangle ABE$.
 ב. הוכח: $\frac{h}{c} = \frac{b}{2R}$.
 ג. הוכח את הנוסחה הבאה לחישוב שטח משולש:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$



- 17)** משולש שווה שוקיים ABC שבו $AB = AC$ וזווית הראש שלו היא זווית קהה חסום במעגל שמרכזו O . AO חותך את הבסיס BC בנקודה D . הנקודה E נמצאת על המשך השוק AC כך ש- BE מאונך ל- CE .
 א. הוכח: $\triangle DBO \sim \triangle EBA$.
 ב. נתון: $\angle EBO = 75^\circ$. חשב את זווית OBD .



- 18)** משולש שווה שוקיים ABC ($BC = AC$) חסום במעגל. הנקודה D היא אמצע הקשת CB . המשך המיתר CD חותך את המשך הצלע AB בנקודה E .
 א. הוכח: $\angle DAC = \angle AEC$.
 ב. הוכח: $AC^2 = DC \cdot CE$.

ב. הוכחה:

$$\left. \begin{array}{l} \angle AED = \angle BAD \quad (\text{נובע מסעיף א'}) \\ \angle BCD + \angle BAD = 180^\circ \quad (\text{סכום זוויות נגדיות במרובע החסום במעגל}) \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

$$\angle BCD + \angle AED = 180^\circ$$

$\Downarrow$

$$\text{אם הסכום של שתי זוויות חד צדדיות} \quad AE \parallel BC$$

הוא 180° אז הישרים מקבילים

מש"ל.

לסיום ננסח את המשפט המתייחס לרדיוסים של מעגלים החסומים במשולשים דומים.

משפט:

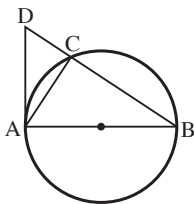
הרדיוסים של מעגלים החסומים במשולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון שבין המשולשים.

הערה: להוכחת המשפט ראה תרגיל 22 בעמ' 409.

תרגילים

(דמיון משולשים במעגל – משיק)

תרגילים יסודיים – דמיון משולשים במעגל – משיק



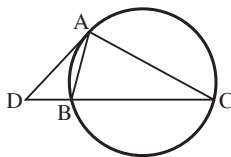
1) ABC הוא משולש החסום במעגל כך שהצלע AB

היא קוטר. הנקודה D נמצאת על המשך הצלע

BC כך שהקטע AD משיק למעגל בנקודה A.

הוכח: א. $\triangle ABC \sim \triangle DBA$.

ב. $\triangle ABC \sim \triangle DAC$.



2) המשולש ABC חסום במעגל. הנקודה D

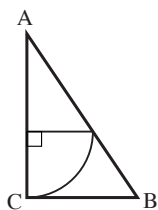
נמצאת על המשך הצלע BC כך שהקטע AD

משיק למעגל בנקודה A.

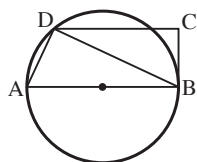
א. הוכח: $\triangle ABD \sim \triangle CAD$.

ב. נתון: $AD = 4$ ס"מ, $DC = 8$ ס"מ.

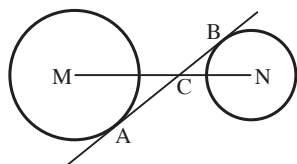
חשב את BC.



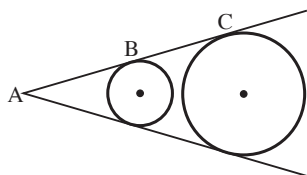
- (3) בתוך משולש ישר זווית ABC
 $(\angle C = 90^\circ)$ חסום רבע מעגל
 כמתואר בציור. נתון:
 $AC = 15$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ.
 חשב את רדיוס רבע המעגל.



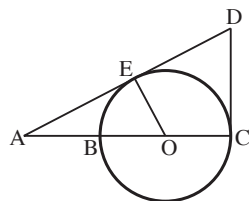
- (4) ABD הוא משולש החסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.
 נתון: $\triangle ABD \sim \triangle BDC$.
 הוכח:
 א. המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית.
 ב. BC משיק למעגל בנקודה B.



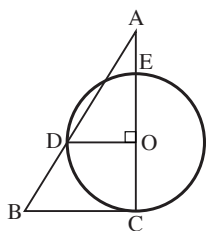
- (5) AB הוא משיק פנימי בנקודות A ו-B למעגלים שמרכזיהם M ו-N. קטע המרכזים MN חותך את AB בנקודה C ואורכו 24 ס"מ. רדיוס המעגל השמאלי הוא 7 ס"מ ורדיוס המעגל הימני הוא 5 ס"מ.
 חשב את אורכי הקטעים MC ו-NC.



- (6) בתוך זווית שהקודקוד שלה A חסומים שני מעגלים זרים כמתואר בציור. נקודות ההשקה של אחת משוקי הזווית הן B ו-C. נתון: $AB = 4$ ס"מ, $BC = 3$ ס"מ.
 ורדיוס המעגל הקטן הוא 1 ס"מ.
 א. חשב את רדיוס המעגל הגדול.
 ב. חשב את המרחק מ-A למרכז המעגל הגדול.

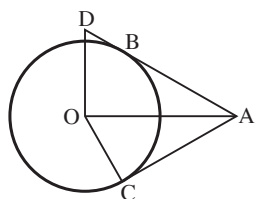


- (7) מהנקודה A יוצאים חותך ABC למעגל שעובר דרך המרכז O ומשיק AE המשיק למעגל בנקודה E. הנקודה D נמצאת על המשך המשיק AE כך שהקטע CD משיק למעגל בנקודה C.
 א. הוכח: $\triangle AOE \sim \triangle ADC$.
 ב. נתון: $DC = 16$ ס"מ, $BC = 20$ ס"מ. מצא את יחס הדמיון בין המשולש AOE למשולש ADC.
 ג. מהו היחס בין שטח המשולש AOE לשטח המרובע EOC?

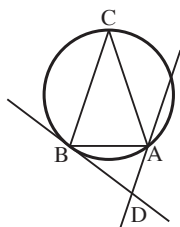


- 8) הצלע AC של משולש ABC חותכת את המעגל בנקודות E ו-C ועוברת דרך המרכז O. הצלע BC משיקה למעגל בנקודה C. D היא אחת מנקודות החיתוך של הצלע AB עם המעגל. (ראה ציור). נתון: $DO \perp AC$.
א. הוכח: $\triangle ADO \sim \triangle ABC$.
ב. נתון: $AE = 3$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.

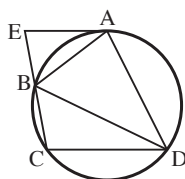
תרגילים נוספים – דמיון משולשים במעגל – משיק



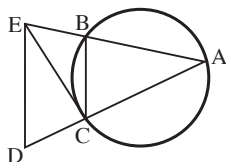
- 9) AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-C. הנקודה D נמצאת על המשך הקטע AB כך שהקטע DO מאונך לקטע AO. הוכח ששני המשולשים שבציור דומים.
ב. נתון: $AD = 10$ ס"מ, $DB = 2$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.
ג. נסמן ב-E את אמצע AD. הנקודה F היא הנקודה על BE כך שמתקיים: $\angle BOF = \angle EOF$. חשב את EF.



- 10) משולש שווה שוקיים ABC ($BC = AC$) חסום במעגל. הישר DA מקביל לשוק BC והישר DB משיק למעגל בנקודה B. הוכח: $\triangle CBA \sim \triangle BAD$.
ב. נתון: $BC = 13.5$ ס"מ, $AD = 6$ ס"מ. חשב את AB.
ג. (ללא קשר לנתונים של סעיף ב') נסמן ב-E את נקודת החיתוך השנייה של AD עם המעגל. הוכח שהמרובע DECB הוא מקבילית.



- 11) המרובע ABCD חסום במעגל. הנקודה E נמצאת על המשך הצלע BC כך שהקטע AE מקביל לצלע CD ומשיק למעגל בנקודה A. הוכח: $\triangle ABD \sim \triangle EBA$.
ב. נסמן ב-F את החיתוך של AB ו-DE. נתון: $AB = a$, $EF = b$, $FD = c$. הבע באמצעות a, b ו-c את BD ואת BE.

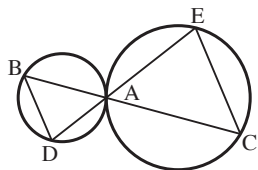


- 12** המשולש ABC חסום במעגל. הנקודה E נמצאת על המשך הצלע AB והנקודה D נמצאת על המשך הצלע AC כך שהקטע DE מקביל לצלע BC והקטע CE משיק למעגל בנקודה C.
א. הוכח: $\triangle ECD \sim \triangle ABC$.

ב. נתון: $AC = 16$ ס"מ, $CD = 9$ ס"מ. חשב את DE.

ג. (ללא קשר לנתונים של סעיף ב') נתון: $\frac{BC}{ED} = \frac{3}{4}$, $\frac{CD}{ED} = \frac{1}{2}$.

חשב את יחס הדמיון בין המשולש ECD למשולש ABC.



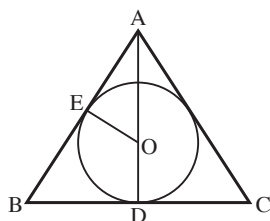
- 13** שני מעגלים משיקים מבחוץ בנקודה A. דרך הנקודה A עוברים ישרים החותכים את המעגלים בנקודות B, C, D ו-E.
א. הוכח: $AB \cdot AE = AD \cdot AC$.
ב. נתון: $BC = a$, $AD = b$, $AE = c$. הבע באמצעות a, b, ו-c את AB.

- 14** מרובע ABCD שבו $BC = CD$ חסום במעגל. הנקודה E נמצאת על המשך הצלע AD מהצד של D כך שהקטע CE משיק למעגל בנקודה C.

א. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle CDE$.

ב. נתון: $AB = 8$ ס"מ, $DE = 2$ ס"מ. חשב את BC.

ג. נתון: $S_{ACE} = a$, $S_{ABCD} = b$, $(b > a)$. הבע באמצעות a ו-b את S_{CDE} .



- 15** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) והוא חוסם מעגל שמרכזו O. E ו-D הן שתיים מנקודות ההשקה.

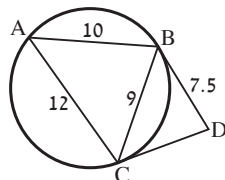
א. הוכח: $\triangle AOE \sim \triangle ABD$.

ב. נתון: $AB = 17$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ.

חשב את רדיוס המעגל.

(ראה גם תרגיל 18 בעמ' 380).

ג. חשב את שטח המרובע BDOE.



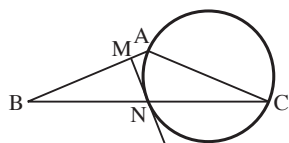
- 16** המשולש ABC חסום במעגל. BD משיק למעגל בנקודה B.

א. היעזר בנתונים שבציור והוכח:

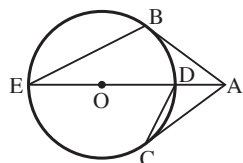
BC חוצה את הזווית ACD.

ב. חשב את CD.

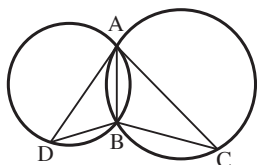
ג. האם CD משיק למעגל בנקודה C? נמק.



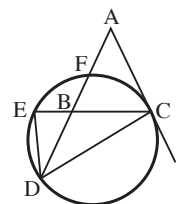
- 17 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). הצלע AC היא קוטר במעגל והצלע BC חותכת את המעגל בנקודה N. M היא נקודה על הצלע AB כך שהקטע MN משיק למעגל בנקודה N. א. הוכח: $MN \perp AB$. ב. נסמן ב-D את אמצע BN. הוכח: $\angle DMN = \angle CAN$.



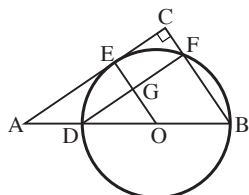
- 18 AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-C. הקטע AO חותך את המעגל בנקודה D והמשכו חותך את המעגל בנקודה E. א. הוכח ששני המשולשים שבציור דומים. ב. נתון: $AB = 6$ ס"מ ורדיוס המעגל הוא 4.5 ס"מ. חשב את AD. ג. נסמן ב-F את החיתוך של AE ו-BC. חשב את OF.



- 19 שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. AC הוא מיתר במעגל הימני שמשק למעגל השמאלי בנקודה A. AD הוא מיתר במעגל השמאלי שמשק למעגל הימני בנקודה A. נתון: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 20$ ס"מ. א. חשב את BD. ב. המשך AB (מהצד של B) חותך את DC בנקודה שנסמן ב-E. חשב את היחס $\frac{DE}{EC}$. נמק.

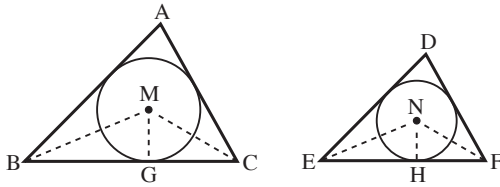


- 20 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). השוק AC משיקה למעגל בנקודה C. השוק AB חותכת את המעגל בנקודה F והמשכה חותך אותו בנקודה D. המשך הבסיס BC חותך את המעגל בנקודה E. הוכח: $DE^2 = CE \cdot BE$. ב. $\widehat{DE} = \widehat{EF}$.

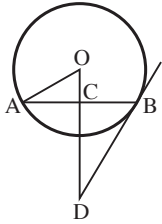


- 21 המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$). הצלע AB עוברת דרך מרכז המעגל O וחותכת את המעגל בנקודות B ו-D. הצלע BC חותכת את המעגל בנקודה F. הצלע AC משיקה למעגל בנקודה E. DF ו-EO נחתכים בנקודה G. א. הוכח: המרובע ECFG הוא מלבן. ב. נתון: $BF = 6$ ס"מ, $DB = 10$ ס"מ. חשב את צלעות המלבן. ג. חשב את הקטעים AD ו-AE.

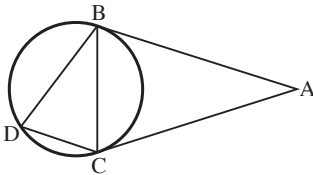
- (22) הוכח את המשפט (ראה עמ' 404):
**הרדיוסים של מעגלים החסומים
 במשולשים דומים מתייחסים זה לזה
 כמו יחס הדמיון שבין המשולשים.**



- (23) AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O. הנקודה C היא אמצע המיתר AB. הנקודה D נמצאת על המשך OC כך שהקטע DB משיק למעגל בנקודה B. א. הוכח: שני המשולשים שבציור דומים. ב. נתון: $AB = 24$ ס"מ, $OD = 25$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.

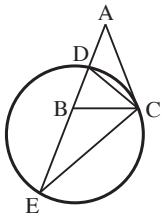


- (24) AB ו-AC משיקים למעגל בנקודות B ו-C. D היא נקודה על המעגל כך שמתקיים: $BD = BC$. א. הוכח: שני המשולשים שבציור דומים. ב. נתון שהיקף המשולש ABC הוא 24 ס"מ והיקף המשולש BDC הוא 16 ס"מ. מצא את הצלעות של שני המשולשים הנ"ל.

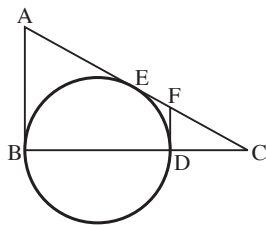


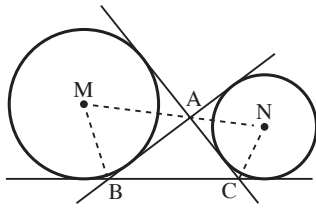
הערה: תרגילים 25 – 27 הם קצת יותר קשים מהרגיל.

- (25) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). השוק AB חותכת את המעגל בנקודה D והמשכה חותך אותו בנקודה E. השוק AC משיקה למעגל בנקודה C. א. הוכח: $\triangle ADC \sim \triangle ACE$. ב. נתון: CD הוא התיכון לשוק AB במשולש ABC. נסמן: $AC = b$. הבע באמצעות b את המיתר DE. ג. הוכח: $S_{DCE} = 3S_{ADC}$.



- (26) הצלעות AB ו-AC של משולש ABC משיקות למעגל בנקודות B ו-C בהתאמה. הצלע BC עוברת דרך מרכז המעגל וחותכת אותו בנקודה נוספת D. F היא נקודה על AC כך שהקטע FD משיק למעגל בנקודה D. נתון: $AC = 20$ ס"מ, $FC = 5$ ס"מ. א. חשב את AB ו-FD. ב. חשב את רדיוס המעגל.





- (27) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N
משיקים כל אחד לצלע אחת
ולחמשכי שתי הצלעות האחרות
של משולש ABC.
הוכח: $\triangle AMB \sim \triangle ANC$.

תשובות (דמיון משולשים במעגל – משיק):

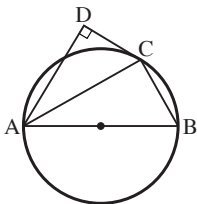
- (2) ב. 6 ס"מ. (3) 6 ס"מ. (5) 14 ס"מ, 10 ס"מ. (6) א. 1.75 ס"מ. ב. 7.22 ס"מ.
(7) ב. 5:8. ג. 25:39. (8) ב. 6 ס"מ. (9) ב. 4 ס"מ. ג. $1\frac{2}{3}$ ס"מ. (11) ב. $a\sqrt{\frac{b}{c}}$,
(12) א. $a\sqrt{\frac{c}{b}}$. ב. 15 ס"מ. ג. $\frac{2}{3}$. (13) ב. $\frac{ab}{b+c}$. (14) ב. 4 ס"מ. ג. $\frac{b-a}{3}$.
(15) ב. 4.8 ס"מ. ג. 38.4 סמ"ר. (16) ב. 6.75 ס"מ. ג. לא. (18) ב. 3 ס"מ.
ג. 2.7 ס"מ. (21) ב. 2 ס"מ, 4 ס"מ. ג. $3\frac{1}{3}$ ס"מ, $6\frac{2}{3}$ ס"מ. (23) ב. 15 ס"מ או
20 ס"מ. (24) ב. 9 ס"מ, 9 ס"מ, 6 ס"מ; 6 ס"מ, 4 ס"מ. (25) ב. 1.5b.
(26) א. 12 ס"מ, 3 ס"מ. ב. 6 ס"מ.

בעיות שונות – דמיון משולשים במעגל

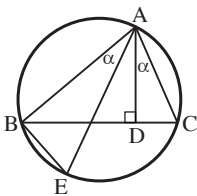
סעיף זה כולל תרגילים על כל חומר הלימוד של דמיון משולשים במעגל.

תרגילים

(בעיות שונות – דמיון משולשים במעגל)



- (1) המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר. DC משיק למעגל בנקודה C.
נתון: $AB = b$, $AC = a$, $AD \perp DC$.
הבע באמצעות a ו-b את:
א. היחס בין שטח המשולש ADC לשטח המשולש ABC.
ב. אורך הקטע AD.



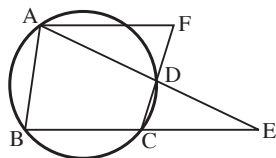
- (2) המשולש ABC חסום במעגל. AD הוא הגובה לצלע BC והוא יוצר זווית α עם הצלע AC. המיתר AE יוצר זווית α עם הצלע AB.
א. הוכח: $AC \cdot BE = AE \cdot DC$.
ב. מה ניתן לומר על המיתר AE? נמק.

ש- $\angle ABE = 45^\circ$. חשב את שטח המשולש BEC.

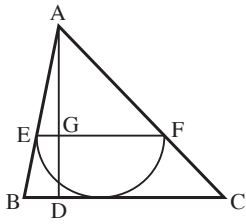
מצא את היקפו של המשולש השני ואת רדיוס המעגל החסום בו.

.DE את הקטע

המרובע ABCF.



13) במשולש ABC חסום חצי מעגל כך שהקוטר EF מקביל לצלע BC כמתואר בציור. AD הוא הגובה לצלע BC והוא חותך את הקוטר EF בנקודה G.



$$\frac{AG}{AD} = \frac{EF}{BC} \quad \text{א. הוכח:}$$

ב. נתון: $AD = 10$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ.

חשב את קוטר חצי המעגל.

ג. חשב את היחס בין שטח המשולש AEG

לשטח המרובע BDGE.

(14) ABCD הוא טרפז $(AB \parallel DC)$. דרך הנקודות

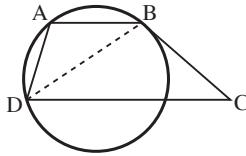
A, B ו-D עובר מעגל כך שהצלע BC משיקה למעגל

בנקודה B. נתון: $BD = 6$ ס"מ, $\frac{AD}{BC} = \frac{5}{8}$.

א. חשב את הבסיסים AB ו-DC.

ב. נסמן: $S_{ABD} = S$. הבע באמצעות S את:

$$.S_{ABCD} \quad (2) \quad .S_{BDC} \quad (1)$$



(15) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N נחתכים בנקודות A ו-B.

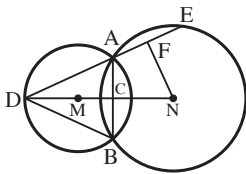
קטע המרכזים MN חותך את הקטע AB בנקודה C.

המשך MN חותך את המעגל השמאלי בנקודה D. המשך

AD חותך את המעגל הימני בנקודה E. הנקודה F היא

אמצע AE. נתון שהיחס בין שטח המשולש ABD לשטח

המרובע AFNC הוא 8 : 9.

מצא את היחס $AB : NF$.

16) המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

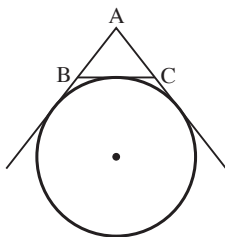
נתון: $AB = AC = 10$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ.

א. חשב את הרדיוס של המעגל החסום ע"י

הבסיס והמשכי השוקיים.

ב. חשב את המרחק בין נקודות ההשקה של

המשכי השוקיים.



(17) AB הוא קוטר במעגל הימני והוא משיק למעגל השמאלי

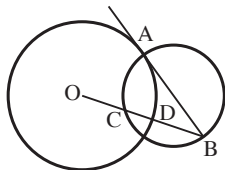
שמרכזו O בנקודה A. הקטע OB חותך את המעגל

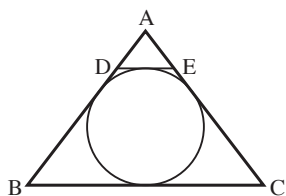
הימני בנקודה C ואת המעגל השמאלי בנקודה D.

נתון: 4 ס"מ BC = ורדיוס המעגל הימני 2.5 ס"מ.

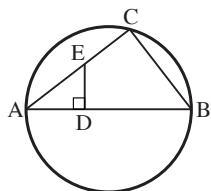
א. חשב את רדיוס המעגל השמאלי.

ב. חשב את CD.

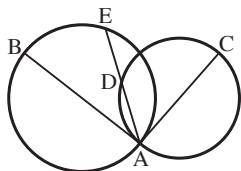




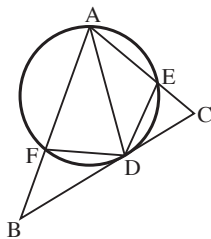
- 18** בתוך משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) חסום מעגל. D ו-E הן נקודות על השוקיים כך שהקטע DE משיק למעגל ומקביל לבסיס BC. נתון: $AB = 15$ ס"מ, $BC = 24$ ס"מ. חשב את DE.



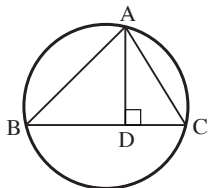
- 19** ABC הוא משולש החסום במעגל. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AB ו-AC כך ש-DE מאונך ל-AB. נתון: $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, $EC = 3$ ס"מ, $DB = 6$ ס"מ. $\frac{S_{ADE}}{S_{DBCE}} = \frac{1}{3}$. חשב את רדיוס המעגל ואת S_{DBCE} .



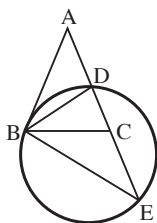
- 20** אחת מנקודות החיתוך של שני מעגלים היא הנקודה A. AB ו-AC הם קטרים המאונכים זה לזה. ישר העובר דרך A חותך מעגל אחד בנקודה D ומעגל שני בנקודה E. א. הוכח: $AD \cdot AE = BE \cdot DC$. ב. נתון: $DE = 8$ ס"מ, $BE = 15$ ס"מ. חשב את AD ואת AE. ג. חשב את הרדיוס של כל אחד מהמעגלים.



- 21** AD הוא חוצה הזווית BAC במשולש ABC. דרך הנקודה A עובר מעגל שחותך את המשולש בנקודות E ו-F כך שהצלע BC משיקה למעגל בנקודה D. א. הוכח: $\triangle AFD \sim \triangle DEC$. ב. $DE^2 = AF \cdot CE$. ג. $\frac{BD}{DC} = \frac{BF}{CE}$.



- 22** AD הוא הגובה לצלע BC במשולש חד זווית ABC החסום במעגל. נתון: $AC = 10$ ס"מ, $DC = 6$ ס"מ. $AB = 12$ ס"מ. חשב את קוטר המעגל. (הערה: ניתן לפתור את התרגיל גם בעזרת טריגונומטריה).



(23) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).

השוק AB משיקה למעגל בנקודה B. השוק AC חותכת את המעגל בנקודה D והמשכה חותכת את המעגל בנקודה E.

א. הוכח: $\triangle ABD \sim \triangle AEB$.

ב. נתון: BD חוצה את הזווית ABC.

הוכח: $BC = CE$.

ג. נסמן: $AB = b$, $BC = a$. הבע באמצעות a ו-b את יחס הדמיון בין המשולש

ABD למשולש AEB.

ד. הבע באמצעות a ו-b את היחס $\frac{S_{BDC}}{S_{BCE}}$.

תשובות (בעיות שונות – דמיון משולשים במעגל):

(1) א. $\frac{a^2}{b^2}$. ב. $\frac{a^2}{b}$. (2) ב. הוא קוטר. (3) ב. כן. ג. $2p$. (4) ב. 13 ס"מ או

12.5 ס"מ. (5) א. 3:4. ב. 4:9. (6) ב. $\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}$. (7) א. 3 ס"מ, 5 ס"מ.

ב. $4\sqrt{60}$ סמ"ר. ג. $\sqrt{15}$ ס"מ. (8) א. $\frac{b^2-ac}{b}$. ב. $b^2 > ac$. (9) א. 15 ס"מ, 9 ס"מ.

ב. $30\frac{6}{7}$ סמ"ר. (10) 63 ס"מ, 6 ס"מ. (11) ב. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ג. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$.

(12) א. 5.5 ס"מ, 6.1875 ס"מ. ב. $\frac{711}{121}S$. (13) ב. 7.5 ס"מ. ג. 25:39.

(14) א. 3.75 ס"מ, 9.6 ס"מ. ב. (1) $\frac{64}{25}S$. (2) $\frac{89}{25}S$. (15) 6:5. (16) א. 12 ס"מ.

(17) א. 3.75 ס"מ. ב. 1.5 ס"מ. (18) $2\frac{2}{3}$ ס"מ. (19) 5 ס"מ, 18 סמ"ר. (22) 15 ס"מ.

(23) ג. $\frac{b}{a+b}$. ד. $\frac{b}{a+b}$.

תרגילים לחזרה – דמיון משולשים במעגל

סיכום המושגים העיקריים:

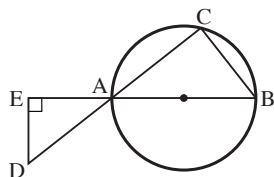
משפט – הרדיוסים של מעגלים החוסמים משולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון שבין המשולשים.

משפט – הרדיוסים של מעגלים החוסמים במשולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון שבין המשולשים.

תרגילים

(תרגילים לחזרה – דמיון משולשים במעגל)

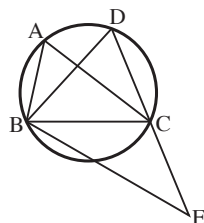
(1) ABC הוא משולש החסום במעגל כך שהצלע AB



היא קוטר. הנקודה E נמצאת על המשך AB והנקודה D נמצאת על המשך AC כך ש- $DE \perp EB$. נתון: $BC = a$, $DE = b$ וכן שהקטע AD גדול מרדיוס המעגל ב-d.

א. הבע באמצעות a, b ו-d את רדיוס המעגל.
ב. איזה תנאי צריך להתקיים כדי שיהיה פתרון לבעיה?

(2) ABC ו-DBC הם שני משולשים החסומים במעגל. הנקודה E נמצאת על המשך DC.

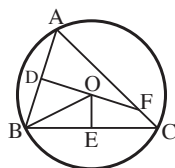


נתון: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE}$

הוכח: א. $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$

ב. $\angle ACD = \angle CBE$

(3) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O. הנקודות D ו-E הן בהתאמה אמצעי הצלעות AB ו-BC. המשך הקטע DO חותך את הצלע AC בנקודה F.

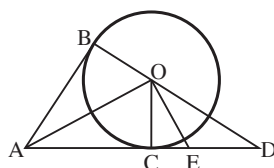


נתון: $AB = 18$ ס"מ, $BC = 24$ ס"מ, $DF = 20$ ס"מ.

א. חשב את OE.

ב. חשב את DO ואת OF.

(4) AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-C. המשך הרדיוס BO חותך את המשך AC בנקודה D.

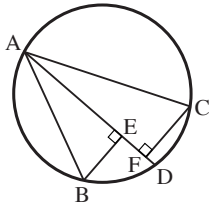


E היא נקודה על AD כך ש-EO חוצה את הזווית COD.

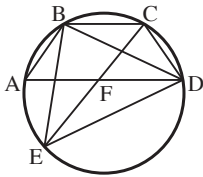
הוכח: א. $\angle AOE = 90^\circ$

ב. $\triangle ABO \sim \triangle AOE$

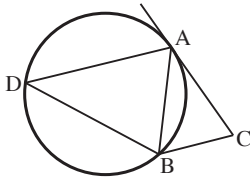
ג. $\triangle DEO \sim \triangle DOA$



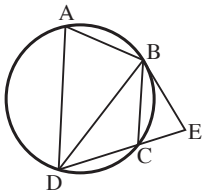
- (5) הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על המעגל והנקודות E ו-F נמצאות על המיתר AD כמתואר בציור. נתון: $BE \perp AD$, $CF \perp AD$, $AB < AC$, $\widehat{BD} = \widehat{CD}$. הוכח: א. $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF}$. ב. $S_{\triangle ABE} < S_{\triangle ACF}$. ג. $S_{\triangle ABD} < S_{\triangle ACD}$.



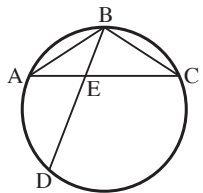
- (6) ABCD הוא טרפז החסום במעגל ($BC \parallel AD$). E נקודה על המעגל. המיתר CE חותך את המיתר AD בנקודה F. הוכח: א. $\triangle BED \sim \triangle CDF$. ב. הוכח: $BE \cdot CF = BD \cdot AB$.



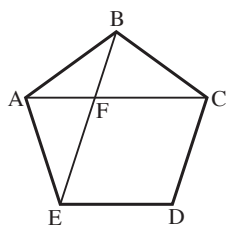
- (7) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). השוק AC משיקה למעגל בנקודה A והשוק AB חותכת את המעגל בנקודות A ו-B. הנקודה D היא אמצע הקשת הגדולה AB. נתון: $DB = a$, $BC = b$ ושטח המרובע ADBC הוא S. הבע באמצעות a, b ו-S את שטח המשולש ADB ואת שטח המשולש ABC.



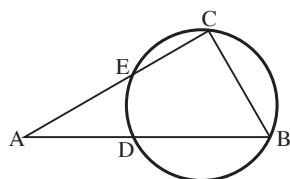
- (8) ABCD הוא מרובע החסום במעגל. הנקודה E נמצאת על המשך DC כך ש- BE משיק למעגל בנקודה B. נתון: $AB = BC$. הוכח: א. $AB^2 = AD \cdot CE$. ב. נתון: $BC \parallel AD$. הוכח: $\frac{DC}{CE} = \frac{AD}{BC}$.



- (9) ABC הוא משולש שווה שוקיים שבו $AB = CB$ והוא חסום במעגל. המיתר BD חותך את הצלע BC בנקודה E. הוכח: א. $AB \cdot CB = BE \cdot BD$. ב. נסמן ב-F את אמצע BD. נתון: $AB = a$, $DE = b$. הבע באמצעות a ו-b את הקטע BF.

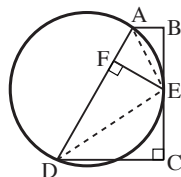


- 10** ABCDE הוא מחומש שכל צלעותיו שוות וניתן לחסום בתוכו מעגל. האלכסונים AC ו-BE נחתכים בנקודה F. הוכח:
- המחומש הוא מחומש משוכלל.
 - $AB^2 = AF \cdot AC$
 - $AB \cdot FC = AF \cdot CE$



- 11** ADB ו-AEC הם חותכים למעגל. נתון: $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle ABC$, $\widehat{DE} = \widehat{CE}$. הוכח:
- $\triangle ABC \sim \triangle BEC$
 - נתון: $BC = 6$ ס"מ, $AC = 9$ ס"מ. חשב את CE.
 - חשב את AB.

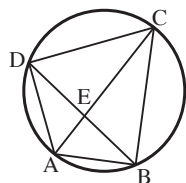
- 12** משולש ABC חסום במעגל. הנקודות D ו-E נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו-AC. נתון: $AB \cdot AD = AC \cdot AE$. הוכח:
- הקטע DE מקביל לישר המשיק למעגל בנקודה A.
 - המרובע BDEC הוא בר חסימה.



- 13** ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel DC$, $AB < DC$). השוק הקצרה BC משיקה למעגל בנקודה E. AD הוא מיתר במעגל. EF ניצב ל-AD. הוכח:
- $\triangle CED \sim \triangle FAE$
 - $\triangle FDE \sim \triangle BEA$
 - הוכח: שטח המלבן שהאורך שלו הוא DC והרוחב שלו הוא AB שווה לשטח הריבוע שהצלע שלו היא FE.

- 14** נתונים ישר ועליו נקודה A ונקודה נוספת B הנמצאת מחוץ לישר. דרך הנקודות A ו-B עובר מעגל שנוגע בישר הנ"ל בנקודה A. אורך המיתר AB הוא 8 ס"מ ומרחק הנקודה B מהישר הנ"ל הוא 5 ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.

הערה: תרגילים 15–16 הם קצת יותר קשים מהרגיל.



- 15** ABCD הוא מרובע החסום במעגל. שאלכסוניו נחתכים בנקודה E. נתון: $AB \cdot BC = AD \cdot DC$. הוכח: $DE = BE$.

16) שני מעגלים משיקים מבפנים בנקודה A. BC הוא מיתר במעגל הגדול המשיק למעגל הקטן בנקודה D. המיתר AB חותך את המעגל הקטן בנקודה E. המיתר AC חותך את המעגל הקטן בנקודה F.
הוכח: א. $\triangle BDE \sim \triangle DAF$.
ב. $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD}$.

תשובות (תרגילים לחזרה – דמיון משולשים במעגל):

- 1) א. $\frac{ad}{2b-a}$. ב. $2b > a$. 3) א. 5.4 ס"מ. ב. 9.6 ס"מ, 10.4 ס"מ. 7) $\frac{a}{a+b} S$,
9) ב. $\frac{1}{4}(b + \sqrt{b^2 + 4a^2})$. 11) ב. 4 ס"מ. ג. 7.5 ס"מ. 14) 6.4 ס"מ.
10) $\frac{b}{a+b} S$.

פרק חמישה עשר הנדסת המישור – פרופורציות במשולש ישר זווית ובמעגל

פרופורציות במשולש ישר זווית

תכונת הגובה ליתר במשולש ישר זווית

בסעיף זה נדון בפרופורציות במשולש ישר זווית. במשפטים יש שימוש במושג היטל ובמושג ממוצע גיאומטרי (ראה בספר מתמטיקה חלק א').

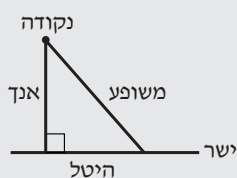
נזכיר את ההגדרות.

הגדרה:

המספר c הוא הממוצע הגיאומטרי של המספרים a ו- b אם מתקיים $c = \sqrt{ab}$ ($c, b, a > 0$).

הגדרה:

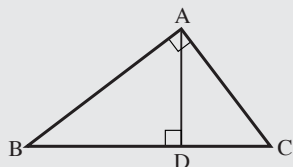
היטל – כאשר נתונים ישר ונקודה מחוץ לישר ניתן להעביר דרך הנקודה אנך לישר ומשופע לישר. הקטע על הישר שבין נקודת החיתוך של האנך עם הישר לבין נקודת החיתוך של המשופע עם הישר נקרא היטל המשופע על הישר.



(ראה גם בספר הנדסה חלק א' עמ' 363).

ננסה עכשיו משפט המתייחס לתכונה של הגובה ליתר במשולש ישר זווית.

א) במשולש ישר זווית הגובה ליתר מחלק את המשולש לשני משולשים דומים שכל אחד מהם דומה למשולש המקורי.
 ב) במשולש ישר זווית הגובה ליתר הוא הממוצע הגיאומטרי של היטלי הניצבים על היתר.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$).

נתון: AD הוא הגובה ליתר BC.

(BD ו-DC הם היטלי הגובה על היתר).

צ"ל: א. $\triangle DBA \sim \triangle DAC \sim \triangle ABC$.

ב. $AD^2 = BD \cdot DC$.

א. הוכחה:

נוכיח שהמשולשים DBA ו-DAC דומים.

$$\left. \begin{array}{l} \angle BDA = \angle CDA \quad (\text{נתון ש-AD הוא גובה}) \\ \angle B = \angle DAC \quad (\text{כי } \angle B + \angle C = 90^\circ \text{ וגם } \angle DAC + \angle C = 90^\circ) \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \quad (\text{עפ"י משפט הדמיון 1.2}).$$

עכשיו נוכיח שהמשולשים DBA ו-ABC דומים.

$$\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle B \quad (\text{זווית משותפת}) \\ \angle ADB = \angle BAC \quad (\text{נתון ש-AD גובה וכן } \angle A = 90^\circ) \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

$$\triangle DBA \sim \triangle ABC \quad (\text{עפ"י משפט הדמיון 1.2}).$$

הוכחנו שהמשולשים DBA ו-DAC דומים וכן שהמשולשים DBA ו-ABC דומים, לכן גם המשולשים DAC ו-ABC דומים.

מש"ל.

ב. הוכחה:

הוכחנו שמתקיים: $\triangle DBA \sim \triangle DAC$ מהדמיון נקבל שהצלעות פרופורציוניות,

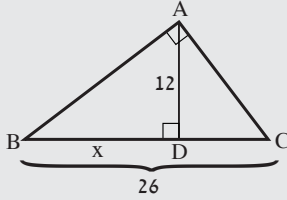
$$\text{כלומר: } \frac{DB}{DA} = \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{AC} \quad \text{מהשוויון שבין שני היחסים שמשמאל נקבל}$$

לאחר כפל במכנה המשותף שהוא $DA \cdot DC$ את השוויון $DB \cdot DC = DA^2$,

$$\text{כלומר } AD^2 = BD \cdot DC \quad \text{אפשר לרשום } AD = \sqrt{BD \cdot DC}$$

מש"ל.

דוגמא:



AD הוא הגובה ליתר BC במשולש ישר זווית ABC
 $(AB \perp AC)$. מצא עפ"י הנתונים בציור את הקטע BD
 המסומן ב-x.

פתרון:

אם $BD = x$ אז $CD = 26 - x$. עפ"י המשפט האחרון
 מתקיים: $AD^2 = BD \cdot DC$ כלומר $12^2 = x(26 - x)$.
 המשוואה המתקבלת היא $x^2 - 26x + 144 = 0$. פתרונות המשוואה הריבועית הם
 $x_1 = 8$, $x_2 = 18$. אם נניח $BD > CD$ נקבל $BD = 18$.

הערות:

(א) כפי שקל לראות מהדוגמא – השימוש במשפט הנ"ל, כלומר השימוש בפרופורציה,
 חוסך את הצורך להוכיח דמיון משולשים ולרשום את היחסים בין הצלעות. מצד שני,
 ברור שהרבה מהתרגילים שמופיעים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת דמיון משולשים
 כפי שעשינו עד כה.

(ב) את הדוגמא האחרונה ניתן לפתור גם בעזרת משפט פיתגורס. עפ"י הסימונים הנ"ל,
 במשולש ABD מתקיים: $x^2 + 12^2 = AB^2$
 במשולש ADC מתקיים: $(26 - x)^2 + 12^2 = AC^2$
 ולכן במשולש ABC מתקיים: $x^2 + 12^2 + (26 - x)^2 + 12^2 = 26^2$.
 המשוואה הריבועית היא אותה משוואה שקיבלנו קודם. השימוש במשפט האחרון
 שלמדנו מקצר את דרך הפתרון. הערה זו נכונה גם להמשך.



(ג) המשפט האחרון מאפשר לבנות בעזרת סרגל ומחוגה
 ריבוע השווה בשטחו לשטח של מלבן נתון. כדי לעשות
 זאת מקצים (על ישר) שתי צלעות סמוכות של המלבן בזו
 אחר זו ועל הקטע המתקבל בונים חצי מעגל כך שהקטע
 הוא קוטר שלו. מנקודת החיבור שבין שתי הצלעות המלבן
 מעלים אנך. עפ"י המשפט האחרון האנך הנ"ל הוא צלע הריבוע השווה בשטחו לשטח
 המלבן. מסתמכים על כך שזווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.

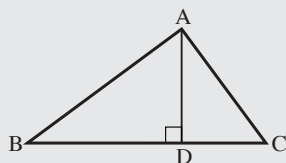
תכונה שבעזרתה מוכיחים שמשולש הוא ישר זווית

ננסח את המשפט ההפוך למשפט הקודם.

משפט:

**אם במשולש הגובה לאחת מהצלעות עובר בתוך המשולש והוא
 הממוצע הגיאומטרי של היטלי שתי הצלעות האחרות על צלע זו
 אז המשולש הוא ישר זווית.**

הערה: המשפט נכון בתנאי שהגובה עובר בתוך המשולש, כלומר היטלי שתי הצלעות
הן על הצלע ולא על המשכה. (ראה תרגיל 18 בעמ' 428).



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

AD הוא הגובה לצלע BC במשולש

ABC והוא עובר בתוך המשולש.

נתון: $AD^2 = BD \cdot DC$

צ"ל: $\angle BAC = 90^\circ$

הוכחה:

את הנתון $AD^2 = BD \cdot DC$ אפשר לרשום באופן הבא
נוכיח עכשיו שהמשולשים ABD ו-CAD דומים:

$$\left. \begin{array}{l} \angle ADB = \angle CDA = 90^\circ \quad (\text{נתון ש-AD הוא גובה}) \\ \frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD} \quad (\text{נובע מהנתון}) \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

$\triangle ABD \sim \triangle CAD$ (עפ"י משפט הדמיון צ.ז.צ.)

$\Downarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle CAD \quad (\text{זוויות מתאימות במשולשים דומים}) \\ \angle BAD = \angle C \quad (\text{זוויות מתאימות במשולשים דומים}) \end{array} \right\}$$

עכשיו נסמן: $\angle B = \angle CAD = \beta$, $\angle BAD = \angle C = \gamma$. במשולש ABC מתקיים:
 $180^\circ = \beta + \gamma + \beta + \gamma$, כלומר $2\beta + 2\gamma = 180^\circ$. אם נחלק ב-2 נקבל $\beta + \gamma = 90^\circ$.
נשים לב שמתקיים $\angle BAC = \beta + \gamma$ ולכן $\angle BAC = 90^\circ$.

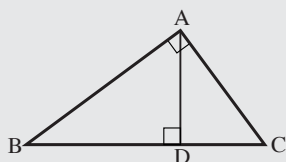
מש"ל.

משפט אוקלידס

ננסח משפט נוסף הנקרא משפט אוקלידס. (גם למשפט זה קיים משפט הפוך).

משפט (אוקלידס):

במשולש ישר זווית ניצב הוא הממוצע הגיאומטרי של היתר ושל היטלו של ניצב זה על היתר.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$).

נתון: AD הוא הגובה ליתר BC.

צ"ל: $AB^2 = BC \cdot BD$, $AC^2 = BC \cdot CD$

הוכחה:

נוכיח שמתקיים $AB^2 = BC \cdot BD$ כפי שראינו כבר מתקיים $\triangle DBA \sim \triangle ABC$

מהדמיון נקבל $\frac{DB}{AB} = \frac{BA}{BC}$, כלומר $AB^2 = BC \cdot BD$

בצורה דומה מוכיחים $AC^2 = BC \cdot CD$

מש"ל.

נביא ניסוח נוסף של המשפט האחרון.

משפט (אוקלידס):

במשולש ישר זווית שטח הריבוע הבנוי על ניצב שווה לשטח המלבן שצלעותיו הן היתר והיטלו של ניצב זה על היתר.

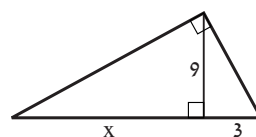
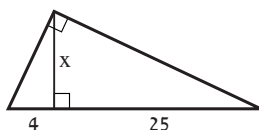
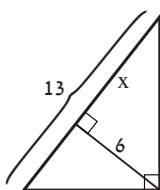
תרגילים

(פרופורציות במשולש ישר זווית)

הגובה ליתר הוא הממוצע הגיאומטרי של היטלי הניצבים על היתר

תרגילים יסודיים – הגובה ליתר הוא הממוצע הגיאומטרי

(1) מצא את הקטע x ואת שטח המשולש החיצוני בתרגילים הבאים:



(2) BD הוא הגובה ליתר AC במשולש ישר זווית ABC

($AB \perp CB$)

א. נתון: $AD = 10$ ס"מ, $CD = 4$ ס"מ

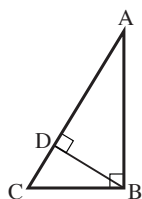
חשב את שטח המשולש ABC. (דייק עד שתי

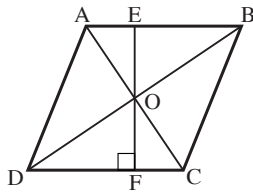
ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

ב. (ללא קשר לנתונים של סעיף א')

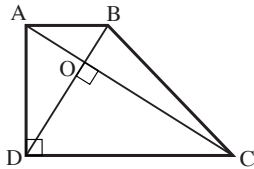
נתון: $AC = 30$ ס"מ, $S_{ABC} = 180$ סמ"ר

חשב את הגובה DB ואת הקטעים AD ו-CD. ($CD < AD$)

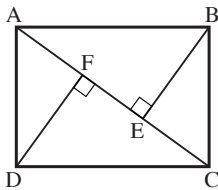




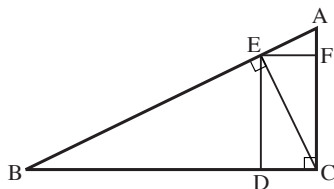
- (3) ABCD הוא מעוין שאלכסוניו נחתכים בנקודה O. EF הוא גובה העובר דרך הנקודה O.
נתון: $DF = 8$ ס"מ,
 $EF = 12$ ס"מ.
חשב את שטח המעוין.



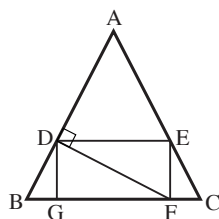
- (4) בטרפז ישר זווית ABCD ($AB \parallel AC$) האלכסונים נחתכים בנקודה O והם ניצבים זה לזה.
נתון: $BO = 4$ ס"מ, $DO = 9$ ס"מ.
א. חשב את האלכסון AC.
ב. חשב את שטח הטרפז.
(הערה: אין צורך למצוא את הגובה והבסיסים).



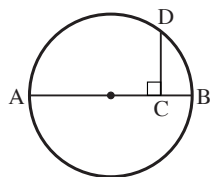
- (5) המרובע ABCD הוא מלבן. מהקודקודים B ו-D הורידו אנכים BE ו-DF לאלכסון AC.
נתון: $EF = 7$ ס"מ, $BE = 12$ ס"מ.
א. חשב את שטח המלבן.
ב. חשב את היקף המלבן.



- (6) בתוך משולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) חסום מלבן CDEF. האלכסון CE של המלבן מאונך ליתר AB. נתון: $EF = a$, $BD = b$.
הבע באמצעות a ו-b את:
א. הצלע FC של המלבן.
ב. שטח המשולש ABC.



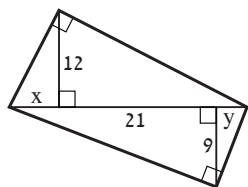
- (7) בתוך משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) חסום מלבן DEFG. האלכסון DF של המלבן מאונך לשוק AB. נתון: $BC = 30$ ס"מ, והצלע EF של המלבן ארוכה ב-5 ס"מ מהקטע FC.
א. חשב את הצלע DG של המלבן. (מצא את שתי האפשרויות).
ב. חשב את שטח המשולש ABC.



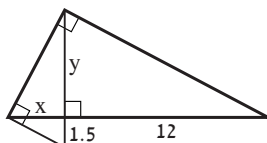
- 8) AB הוא קוטר במעגל. C היא נקודה כלשהי על AB.
 D היא נקודה על המעגל כך ש-DC מאונך ל-AB.
 א. הוכח: $CD^2 = AC \cdot CB$.
 ב. נתון: $DC = 9$ ס"מ, $AB = 22.5$ ס"מ.
 חשב את AC ואת BC ($AC > BC$).
 ג. חשב את מרחק המיתר AD ממרכז המעגל.

תרגילים נוספים – הגובה ליתר הוא הממוצע הגיאומטרי

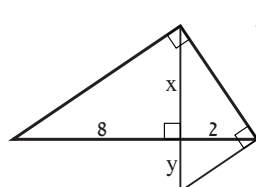
- 9) מצא את הקטעים המסומנים ב-x ו-y בציורים הבאים:



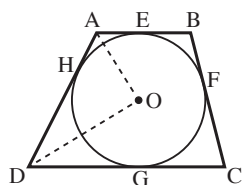
א.



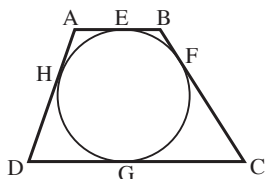
ב.



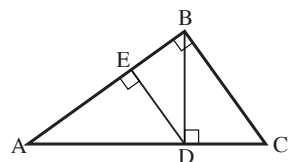
ג.



- 10) ABCD הוא טרפז שבו $AB \parallel DC$ והוא חוסם מעגל שמרכזו O ורדיוסו R. נקודות ההשקה הן: E, F, G ו-H.
 א. הוכח: $\angle AOD = 90^\circ$.
 ב. $AH \cdot DH = R^2$.
 ג. $AH \cdot DH = BF \cdot CF$.
 ד. $\frac{AE}{BE} = \frac{CG}{DG}$.

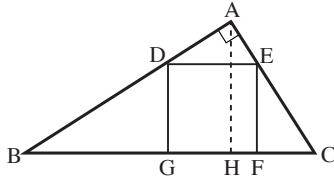


- 11) ABCD הוא טרפז שבו $AB \parallel DC$ והוא חוסם מעגל. נקודות ההשקה הן: E, F, G ו-H.
 נתון: $AE = 4.5$ ס"מ, $DG = 8$ ס"מ.
 א. חשב את רדיוס המעגל.
 ב. נתון: $BC = 15$ ס"מ. חשב את EB ו-GC. ($EB < GC$).
 ג. נסמן ב-O את מרכז המעגל וב-K את החיתוך של CO ו-BG. חשב את היחס $\frac{GK}{KB}$. נמק את תשובתך.



- 12) BD הוא הגובה לצלע AC במשולש ישר זווית ABC ($AB \perp BC$). DE הוא הגובה לצלע AB במשולש ABD.
 נתון: $\frac{BC}{ED} = \frac{25}{16}$, $AC = 10$ ס"מ.
 א. חשב את BD.
 ב. חשב את DE.
 ג. F היא נקודה על BC כך שמתקיים: $DF = FC$. חשב את DF.

13) במשולש ישר זווית ABC ($\angle A = 90^\circ$) חסום ריבוע



DEFG. נתון: $BG = 20$ ס"מ, $FC = 5$ ס"מ.

א. חשב את צלע הריבוע.

(הדרכה: הוכח: $\triangle BDG \sim \triangle ECF$).

ב. נתון ש-AH הוא הגובה ליתר BC.

חשב את AH.

ג. חשב את הקטעים BH ו-CH. ($BH > CH$).

14) המשולש ABC הוא שווה שוקיים

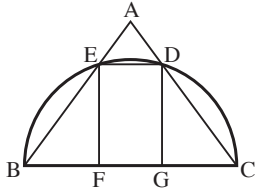
($AB = AC$). BC הוא קוטר של חצי מעגל

שחותך את השוקיים בנקודות D ו-E.

DEFG הוא מלבן החסום בחצי המעגל.

נתון: $AB = 5$ ס"מ, $BC = 6$ ס"מ.

מצא את צלעות המלבן.

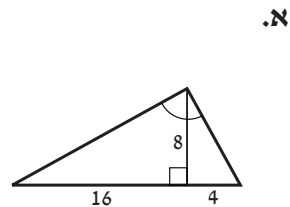
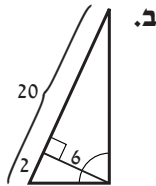
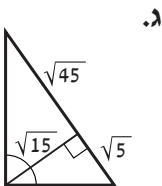


**אם גובה לצלע הוא הממוצע הגיאומטרי של היטלי שתי הצלעות על הצלע
אז המשולש ישר זווית**

תרגילים יסודיים – המשפט ההפוך – אם הגובה לצלע הוא הממוצע הגיאומטרי

15) בציורים הבאים נתון משולש ובתוכו גובה.

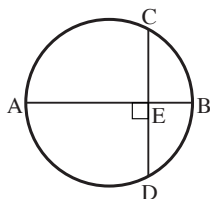
הוכח שהזווית שמסומנת בקשת היא זווית ישרה:



16) AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC. (הגובה עובר בתוך המשולש).

נתון: $BD = 5$ ס"מ, $DC = 20$ ס"מ. ושטח המשולש ABC הוא 125 סמ"ר.

הוכח: המשולש ABC הוא ישר זווית.



17) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל המאונכים זה לזה

שנחתכים בנקודה E. נתון: $AE \cdot BE = CE^2$.

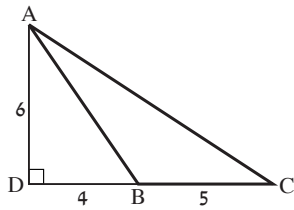
א. הוכח: AB הוא קוטר במעגל.

ב. הוכח: $CE = DE$.

ג. נתון: $AC = a$, $BC = b$ ורדיוס המעגל הוא R.

הבע באמצעות a, b ו-R את CD.

תרגילים נוספים – המשפט ההפוך – אם הגובה לצלע הוא הממוצע הגיאומטרי

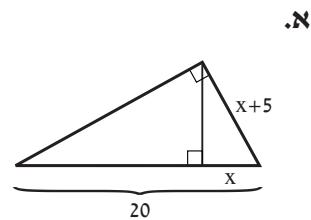
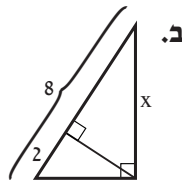
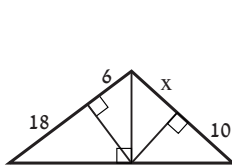


- 18) הסבר עפ"י הנתונים בציור מדוע המשפט שבעמ' 422 נכון רק בתנאי שהגובה עובר בתוך המשולש. (כלומר: היטלי שתי הצלעות הן על הצלע ולא על המשכה).

ניצב הוא הממוצע הגיאומטרי של היתר והיטל הניצב על היתר (משפט אוקלידס)

תרגילים יסודיים – ניצב הוא הממוצע הגיאומטרי

- 19) מצא את הקטע x עפ"י הנתון בציורים הבאים:



- 20) משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו 25 ס"מ

ומרכזו O כך שהצלע BC היא קוטר.

AD הוא הגובה לצלע BC. (D נמצאת על OC).

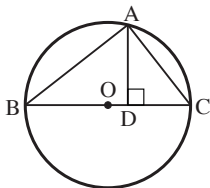
נתון: $OD = 7$ ס"מ.

א. חשב את AC ואת AD.

ב. E נקודה על AC כך שמתקיים:

$AE = 15$ ס"מ. נסמן ב-F את

החיתוך של AO ו-BE. חשב את AF.



- 21) AB הוא משיק למעגל בנקודה B ו-ACD הוא חותך

למעגל. BD הוא קוטר. נתון: $DC = 9$ ס"מ.

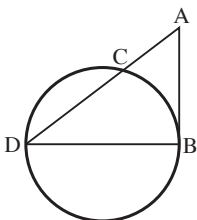
$AC = 7$ ס"מ.

א. חשב את רדיוס המעגל.

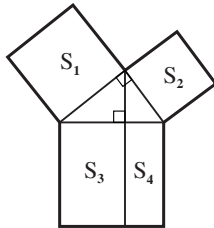
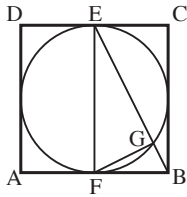
ב. נסמן ב-E את אמצע הקשת BC. המשך

DE חותך את AB בנקודה שנסמן ב-F.

חשב את היחס $\frac{BF}{FA}$.



תרגילים נוספים – ניצב הוא הממוצע הגיאומטרי



22) ABCD הוא ריבוע החוסם מעגל.

E ו-F הן שתיים מנקודות ההשקה.

הקטע BE חותך את המעגל בנקודה G.

א. הוכח: $BF^2 = BE \cdot BG$.

ב. נתון שצלע הריבוע היא a. הבע באמצעות

a את BG ו-GE וחשב את היחס $\frac{BG}{GE}$.

23) על הצלעות של משולש ישר זווית בנו ריבועים.

המשך הגובה ליתר מחלק את הריבוע שבנוי

על היתר לשני מלבנים.

הוכח: $S_2 = S_4$, $S_1 = S_3$.

תשובות (פרופורציות במשולש ישר זווית):

1) א. 27, 135. ג. 4 או 9, 39. 2) א. 44.27 ס"מ. ב. 12 ס"מ, 24 ס"מ, 6 ס"מ.

3) 150 סמ"ר. 4) א. 19.5 ס"מ. ב. 126.75 סמ"ר. 5) א. 300 סמ"ר. ב. 70 ס"מ.

6) א. $\sqrt{ab}$. ב. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(a+b)^2$. 7) א. 10 ס"מ או $6\frac{2}{3}$ ס"מ. ב. 300 סמ"ר או

900 סמ"ר. 8) ב. 18 ס"מ, 4.5 ס"מ. ג. 5.03 ס"מ. 9) א. 4, 1. ב. 3, 6. ג. 6, 3.

11) א. 6 ס"מ. ב. 3 ס"מ, 12 ס"מ. ג. $\frac{4}{5}$. 12) א. 5 ס"מ. ב. 4 ס"מ. ג. $3\frac{1}{8}$ ס"מ.

13) א. 10 ס"מ. ב. 14 ס"מ. ג. 28 ס"מ, 7 ס"מ. 14) $DE = 1.68$ ס"מ.

2.88 ס"מ $GD =$. 17) ג. $\frac{ab}{2R}$. 19) א. 5. ב. 6.93. ג. 8. 20) א. 30 ס"מ, 24 ס"מ.

ב. $16\frac{2}{3}$ ס"מ. 21) א. 6 ס"מ. ב. $\frac{3}{4}$. 22) ב. $\frac{a}{2\sqrt{5}}$, $\frac{2a}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{4}$.

פרופורציות במעגל

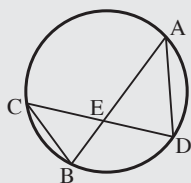
התכונה של מיתרים במעגל

בסעיף זה נדון בפרופורציות במעגל וננסה שלושה משפטים. נתחיל עם המשפט

הראשון.

משפט:

אם במעגל שני מיתרים נחתכים אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

נתון: AB ו-CD הם מיתרים במעגל

שנחתכים בנקודה E.

צ"ל: $AE \cdot BE = CE \cdot DE$

הוכחה:

נוכיח תחילה שהמשולשים ADE ו-CBE דומים.

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle C \quad (\text{זוויות היקפיות הנשענות על הקשת BD}) \\ \angle AED = \angle CEB \quad (\text{זוויות קודקודיות}) \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

$$\Delta ADE \sim \Delta CBE \quad (\text{עפ"י משפט הדמיון ז.ז.})$$

$\Downarrow$

$$\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE} \quad (\text{צלעות מתאימות במשולשים דומים - פרופורציוניות})$$

$\Downarrow$

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE \quad (\text{כפל פי } CE \cdot BE)$$

מש"ל.

דוגמא א':

AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O.

הנקודה C נמצאת על המיתר.

נתון: $AC = 7$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ.

$OC = 5$ ס"מ.

חשב את רדיוס המעגל.

פתרון:

כדי להיעזר במשפט האחרון נאריך את

OC משני צדדיו כך שנקבל קוטר EF.

הקטעים EO ו-FO שווים זה לזה כי

שניהם רדיוסים. אם נסמן $EO = x$

אז $EC = x + 5$ ואילו $FC = x - 5$.

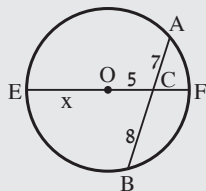
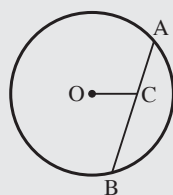
עפ"י המשפט האחרון מתקיים $EC \cdot FC = AC \cdot BC$

ולכן המשוואה היא $(x+5)(x-5) = 7 \cdot 8$, כלומר $x^2 - 25 = 56$, לכן $x^2 = 81$

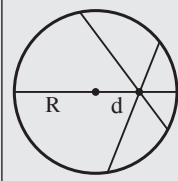
והפתרונות $x_{1,2} = \pm 9$.

לסיכום: הרדיוס הוא 9 ס"מ.

מהפתרון של הדוגמא נוכל להסיק את המסקנה הבאה:



מסקנה:



אם נקודה נמצאת בתוך מעגל שרדיוסו R במרחק d ממרכזו אז מכפלת קטעי המיתרים הנחתכים בנקודה זו היא גודל קבוע השווה ל- $R^2 - d^2$.

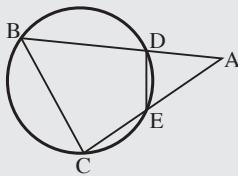
התכונה של חותכים למעגל

ננסח את המשפט השני.

משפט:

אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

הערה: הכוונה כאן במושג "חותך" היא לקטע שמהנקודה ממנה יוצא החותך ועד לנקודת החיתוך הרחוקה של החותך עם המעגל.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

נתון: ADB ו-AEC הם חותכים למעגל.

צ"ל: $AB \cdot AD = AC \cdot AE$

הוכחה:

נוכיח תחילה שהמשולשים ABC ו-AED דומים.

שלב א': $\angle ABC + \angle CED = 180^\circ$ (סכום זוויות נגדיות במרובע החסום במעגל)
 $\angle AED + \angle CED = 180^\circ$ (זוויות צמודות)

$\Downarrow$

$$\angle ABC = \angle AED$$

שלב ב': $\angle A = \angle A$ (זווית משותפת)
 $\angle ABC = \angle AED$ (הוכחנו בשלב א')

$\Downarrow$

(עפ"י משפט הדמיון ז.ז.) $\triangle ABC \sim \triangle AED$

$\Downarrow$

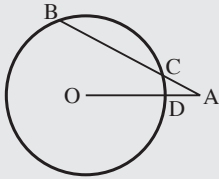
(צלעות מתאימות במשולשים דומים – פרופורציוניות) $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$

$\Downarrow$

$$AB \cdot AD = AC \cdot AE \quad (\text{כפל פי } AE \cdot AD)$$

מש"ל.

דוגמא ב':



ACB הוא חותך למעגל שמרכזו O.

הקטע AO חותך את המעגל בנקודה D.

נתון: $AC = 3$ ס"מ, $BC = 9$ ס"מ.

2 ס"מ $AD =$ חשב את רדיוס המעגל.

פתרון:

AO הוא לא חותך למעגל אבל אם נאריך אותו

עד שיחתוך את המעגל בנקודה E נקבל E-ש-

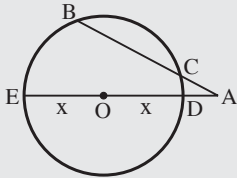
הוא חותך למעגל. כמו כן $ED = DO$ כי הם

רדיוסים. נסמן $DO = x$ ואז $AE = 2x + 2$.

עפ"י המשפט האחרון המשוואה היא:

$$3 \cdot 12 = 2(2x + 2) \quad \text{לכן} \quad 36 = 4x + 4 \quad \text{מכאן} \quad 4x = 32 \quad \text{כלומר} \quad x = 8.$$

לסיכום: רדיוס המעגל הוא 8 ס"מ.

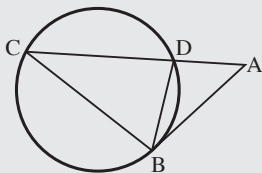


התכונה של חותך ומשיק למעגל

נעבור למשפט השלישי.

משפט:

אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.



ניסוח הנתונים ומה שצריך להוכיח בשפה מתמטית:

נתון: ADC הוא חותך למעגל ו-AB

הוא משיק למעגל בנקודה B.

צ"ל: $AC \cdot AD = AB^2$

הוכחה:

נוכיח שהמשולשים ACB ו-ABD דומים.

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A \quad (\text{זווית משותפת}) \\ \angle ACB = \angle ABD \quad (\text{זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר}) \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

$$(\text{עפ"י משפט הדמיון 1.1.}) \quad \triangle ACB \sim \triangle ABD$$

$\Downarrow$

$$(\text{צלעות מתאימות במשולשים דומים - פרופורציוניות}) \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$$

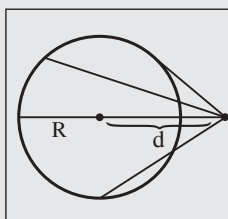
$\Downarrow$

$$(\text{כפל פי } AB \cdot AD) \quad AC \cdot AD = AB^2$$

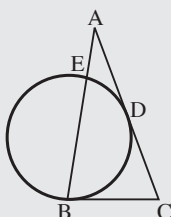
מש"ל.

בדומה למסקנה שבעמ' 431 נוכל עפ"י שני המשפטים האחרונים לנסח את המסקנה הבאה:

מסקנה:



אם נקודה נמצאת מחוץ למעגל שרדיוסו R במרחק d ממרכזו אז מכפלת החותכים היוצאים מנקודה זו בחלקם החיצוני היא גודל קבוע השווה ל- $d^2 - R^2$. (גודל זה שווה לריבוע המשיק היוצא מהנקודה).



דוגמא ג':

במשולש ABC הצלעות AC ו-BC משיקות למעגל בנקודות D ו-B בהתאמה. הצלע AB חותכת את המעגל בנקודה E. נתון: $BE = 6$ ס"מ, $BC = 5$ ס"מ, $AC = 9$ ס"מ. חשב את AE.

פתרון:

מהנקודה C יוצאים שני משיקים למעגל ולכן $DC = BC = 5$ ס"מ. לפי הנתון $AC = 9$ ס"מ ולכן $AD = 9 - 5 = 4$ ס"מ. מהנקודה A יוצאים משיק וחותר למעגל ולכן עפ"י המשפט האחרון מתקיים: $AE \cdot AB = AD^2$. אם נסמן $AE = x$ אז עפ"י הנתון $AB = 6 + x$ ולכן המשוואה היא $x(6+x) = 4^2$. המשוואה הריבועית היא $x^2 + 6x - 16 = 0$. הפתרונות הם $x_1 = 2$, $x_2 = -8$. לסיכום: $AE = 2$ ס"מ.

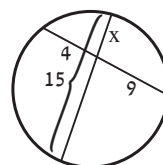
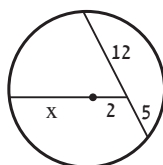
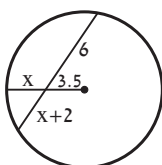
תרגילים

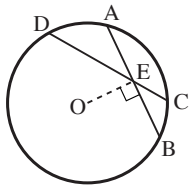
(פרופורציות במעגל)

אם במעגל שני מיתרים נחתכים אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני

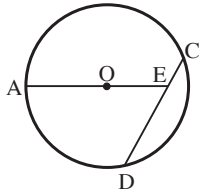
תרגילים יסודיים – מכפלת קטעי מיתרים

1) בתרגילים הבאים מצויירים מיתרים הנחתכים בתוך מעגל. מצא את הקטע x : (בסעיפים ב' ו-ג' הנקודה המודגשת היא מרכז המעגל)

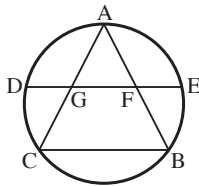




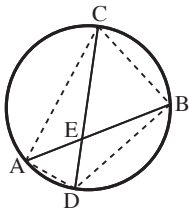
- (2) במעגל שמרכזו O עוברים שני מיתרים AB ו-CD שנחתכים בנקודה E. הקטע OE מאונך למיתר AB. נתון: $AB = 12$ ס"מ, $DC = 13$ ס"מ. חשב את DE ו-EC. ($DE > CE$).



- (3) AO הוא רדיוס במעגל שמרכזו O ורדיוסו 15 ס"מ. CD הוא מיתר במעגל. הנקודה E נמצאת על המשך AO ועל המיתר CD. נתון: $CE = 4$ ס"מ, $DE = 14$ ס"מ. א. חשב את הקטע OE. ב. חשב את מרחק המיתר CD מהמרכז O.

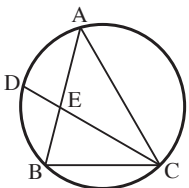


- (4) ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$). המיתר DE חוצה את הצלעות AB ו-AC בנקודות F ו-G בהתאמה. נתון: $BC = 10$ ס"מ, $AC = 12$ ס"מ. חשב את אורך המיתר DE.



- (5) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל הנחתכים בנקודה E. נתון: $AE = 4$ ס"מ, $BE = 6$ ס"מ, $CD = 11$ ס"מ. א. חשב את CE. ($CE > DE$). ב. חשב את:

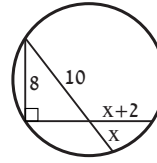
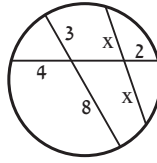
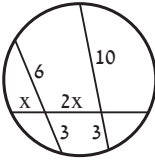
$$\frac{S_{BED}}{S_{CEA}} \quad (2) \quad \frac{S_{CEB}}{S_{AED}} \quad (1)$$



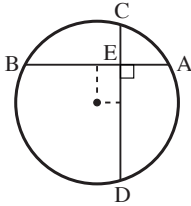
- (6) המשולש ABC חסום במעגל. המיתר CD חותך את AB בנקודה E. נתון: $\frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$, $\widehat{AD} = \widehat{BD}$. $AB = 16$ ס"מ, $DC = 17$ ס"מ. חשב את DE. ($DE < EC$).

תרגילים נוספים – מכפלת קטעי מיתרים

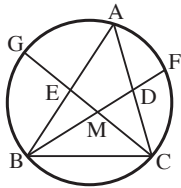
(7) מצא את הקטע x בציורים הבאים:



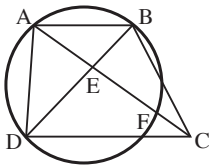
- (8) AB ו- CD הם שני מיתרים במעגל המאונכים זה לזה שנתכים בנקודה E . נתון: $AB = 13$ ס"מ, $CD = 15$ ס"מ ומרחק המיתר AB מהמרכז הוא 4.5 ס"מ.
א. חשב את AE ו- BE ($BE > AE$).
ב. מצא את מרחק המיתר CD מהמרכז.



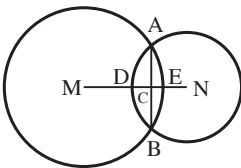
- (9) המשולש ABC חסום במעגל. BD ו- CE הם תיכונים במשולש שנתכים בנקודה M . F ו- G הן בהתאמה נקודות החיתוך של המשכי התיכונים עם המעגל. נתון: $AC = 12$ ס"מ, $GE = 7$ ס"מ, $MF = 6\frac{1}{3}$ ס"מ.
חשב את EC ($MD > DF$).



- (10) $ABCD$ הוא טרפז ($AB \parallel DC$) ששלושה מקודקדיו נמצאים על המעגל. אלכסוני הטרפז נחתכים בנקודה E . האלכסון AC חותך את המעגל גם בנקודה F .
הוכח: $CE \cdot EF = DE^2$.



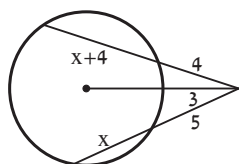
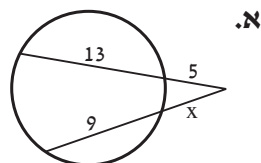
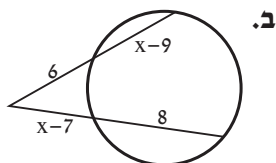
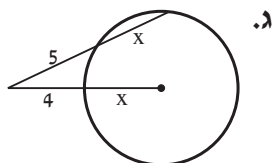
- (11) AB הוא המיתר המשותף לשני מעגלים שמרכזיהם M ו- N . (ראה ציור). קטע המרכזים MN חותך את המעגל הימני בנקודה D , את המיתר AB בנקודה C ואת המעגל השמאלי בנקודה E . נתון: $MN = 24$ ס"מ, $DC = 4$ ס"מ, $CE = 2$ ס"מ.
חשב את הרדיוסים של המעגלים.



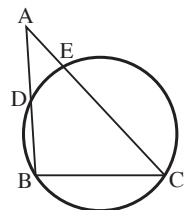
אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני

תרגילים יסודיים – חותכים למעגל

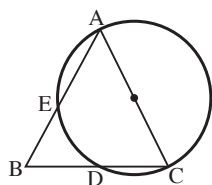
12 בתרגילים הבאים מצוירים חותכים למעגל. מצא את x :
(בסעיף ג' הנקודה המודגשת היא מרכז המעגל)



13 מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל וקטע שמחבר את הנקודה עם מרכז המעגל. מצא את רדיוס המעגל עפ"י הנתונים בציור. (הנתונים בס"מ).



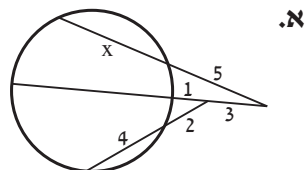
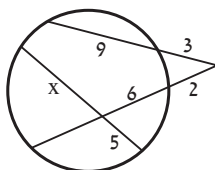
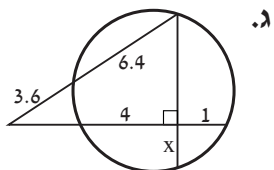
14 ADB ו- AEC הם חותכים למעגל.
נתון: $AD = 4$ ס"מ, $BD = 8$ ס"מ, $CE = 13$ ס"מ.
א. חשב את AC .
ב. נתון: $DE = 2.5$ ס"מ. חשב את BC .

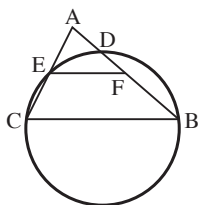


15 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
השוק AC הוא קוטר. הבסיס BC חותך את המעגל בנקודה D . השוק AB חותכת את המעגל בנקודה E . נתון: $AC = 18$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ.
א. חשב את BE ו- AE .
ב. חשב את DE .
ג. חשב את CE .

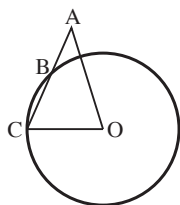
תרגילים נוספים – חותכים למעגל

16 מצא את הקטע x בציורים הבאים:

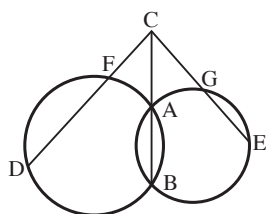




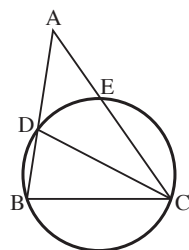
- 17** הצלע BC של משולש ABC היא מיתר במעגל. הצלעות AB ו-AC חותכות את המעגל בהתאמה בנקודות D ו-E. הנקודה F נמצאת על הצלע AB כך שהקטע EF מקביל לצלע BC. נתון: $AC = 10$ ס"מ, $BC = 15$ ס"מ, $AB = 12$ ס"מ, $EF = 9$ ס"מ. א. חשב את AD. ב. חשב את DF.



- 18** המשולש ACO הוא שווה שוקיים ($AC = AO$). הנקודה O היא מרכז המעגל. השוק AC חותכת את המעגל בנקודות B ו-C. נתון: $CO = 6$ ס"מ, $AB = 5$ ס"מ. חשב את הקטע BC.



- 19** AB הוא המיתר המשותף לשני מעגלים. הנקודה C נמצאת על המשך AB. הנקודות CFD ו-CGE הם חותכים למעגלים בהתאמה. א. הוכח: $CD \cdot CF = CE \cdot CG$. ב. נתון: $CF = 4$ ס"מ, $DF = 6$ ס"מ, $CG = 3$ ס"מ. חשב את GE. ג. חשב את היחס $\frac{FG}{DE}$. נמק את תשובתך.



- 20** הצלע BC של משולש ABC היא מיתר במעגל. הצלעות AB ו-AC חותכות את המעגל בהתאמה בנקודות D ו-E. המיתר DC הוא חוצה הזווית C במשולש ABC. צלעות המשולש ABC הן: $AB = 10$ ס"מ, $AC = 12$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ. א. חשב את CE. ב. שרטט בציור את המיתר BE וסמן ב-F את נקודת החיתוך שלו עם CD. נתון: $BE = a$. הבע באמצעות a את המכפלה $DF \cdot CF$.

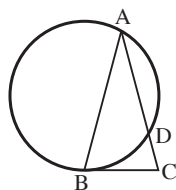
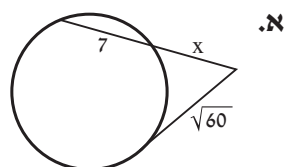
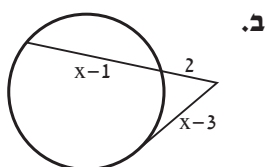
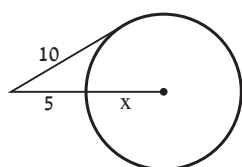
- 21** ABC ו-ADE הם שני חותכים למעגל היוצאים מנקודה A מחוץ למעגל. נתון: $AB : BC = 2 : 1$, $AD : DE = 3 : 5$. חשב את היחס $AC : AE$.

- (22) AB ו-AC הם שני מיתרים המאונכים זה לזה במעגל שרדיוסו 6.5 ס"מ. D היא נקודה הנמצאת מחוץ למעגל על המשך הקטע AC מהצד של C. הקטע BD חותך את המעגל בנקודה E. נתון: $AB = 12$ ס"מ, $CD = 4$ ס"מ. א. חשב את DE. ב. חשב את CE. ג. חשב את שטח המשולש CDE.

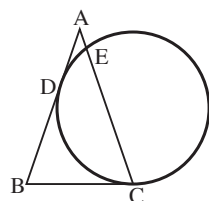
אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק

תרגילים יסודיים – חותך ומשיק למעגל

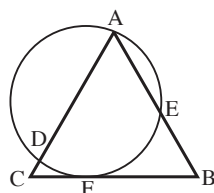
- (23) בתרגילים הבאים מצויירים משיק וחיתוך למעגל. מצא את x: (בסעיף ג' הנקודה המודגשת היא מרכז המעגל)



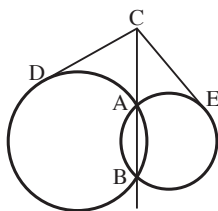
- (24) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). הנקודה A נמצאת על המעגל. הצלע AC חותכת את המעגל בנקודה D. הצלע BC נוגעת במעגל בנקודה B. נתון: $AB = 8$ ס"מ, $BC = 4$ ס"מ. א. חשב את CD ו-AD. ב. חשב את BD.



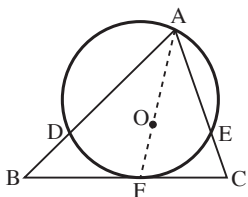
- (25) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) והוא משיק למעגל בנקודות C ו-D. השוק AC חותכת את המעגל בנקודה E. נתון: $AC = a$, $BC = b$ ($b < a < 2b$). א. הבע את AE ואת CE בעזרת a ו-b. ב. הסבר את תנאי ההגבלה $b < a < 2b$.



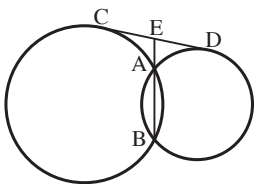
- (26) המשולש ABC הוא שווה צלעות. הנקודה A נמצאת על המעגל. D ו-E הן נקודות החיתוך של הצלעות AC ו-AB עם המעגל בהתאמה. F היא נקודת ההשקה של הצלע BC. נתון: $AE = 5$ ס"מ, $CF = 3$ ס"מ. חשב את אורך המיתר AD.



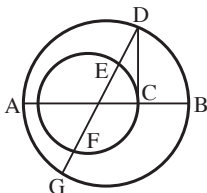
- (27)** שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. הנקודה C נמצאת על המשך הקטע AB. CD ו-CE משיקים למעגלים בנקודות D ו-E בהתאמה.
 א. הוכח: $CD = CE$.
 ב. הנקודה F (שלא מסומנת בציור) היא נקודה על AB כך שמתקיים: $CF = CE$.
 (1) מצא את המשולש שהנקודה C היא מרכז המעגל החוסם אותו. נמק.
 (2) הוכח: $\angle FED = \frac{1}{2} \angle ACD$.



- (28)** הקודקוד A של משולש ABC נמצא על המעגל. הצלעות AC ו-AB חותכות את המעגל בהתאמה בנקודות E ו-D. הצלע BC נוגעת במעגל בנקודה F. הנקודה O נמצאת על AF. נתון: $AE = 6$ ס"מ, $FC = 4$ ס"מ, $AD = 7.5$ ס"מ, $BD = 2.5$ ס"מ, $AO = 2FO$.
 הוכח: הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.



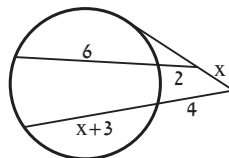
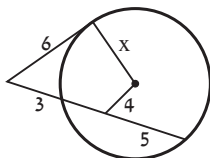
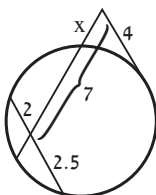
- (29)** AB הוא המיתר המשותף לשני מעגלים. CD הוא משיק המשותף לשני המעגלים בנקודות C ו-D. המשך AB חותך את CD בנקודה E.
 א. הוכח: הנקודה E היא אמצע CD.
 ב. נתון: $CD = BE$. הוכח: $AE = \frac{1}{4} CD$.



- (30)** AB הוא קוטר במעגל הגדול והוא עובר דרך מרכז המעגל הקטן. C היא נקודה על AB ו-D היא נקודה על המעגל הגדול כך שהקטע DC משיק למעגל הקטן בנקודה C. המיתר DG חותך את המעגל הקטן בנקודות E ו-F.
 הוכח: $AC \cdot BC = DF \cdot DE$.

תרגילים נוספים – חותך ומשיק למעגל

- (31)** בציורים הבאים מצויירים משיקים, חותכים ומיתרים. מצא את x: (בסעיף ב' הנקודה המודגשת היא מרכז המעגל)



(32) המרובע ABCD הוא מלבן. הצלע AD היא מיתר

במעגל. הצלע AB חותכת את המעגל בנקודה E.

הצלע BC משיקה למעגל בנקודה F.

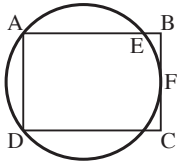
א. הוכח שהנקודה F היא אמצע הצלע BC.

ב. נתון: $AB = 16$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ.

חשב את קוטר המעגל.

ג. שרטט בציור את האלכסון BD וסמן את נקודת

החיתוך שלו עם המעגל ב-H. חשב את DH.



(33) המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$).

הנקודה A נמצאת על המעגל. היתר AB חותך

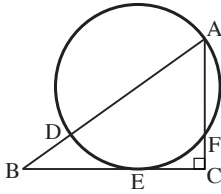
את המעגל בנקודה D. הניצב BC משיק למעגל

בנקודה E. הניצב AC חותך את המעגל בנקודה F.

נתון: $AF = 9$ ס"מ, $CF = 3$ ס"מ, $BE = 10$ ס"מ.

א. הוכח: AD הוא קוטר במעגל.

ב. הוכח: AE הוא חוצה הזווית BAC.



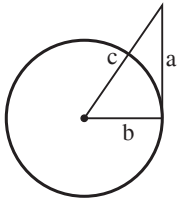
(34) היעזר במשפט שבעמ' 432 ובציור

כדי להוכיח את משפט פיתגורס.

הניצב a משיק למעגל, הניצב b

הוא רדיוס והיתר הוא c. (הנקודה

המודגשת היא מרכז המעגל).



(35) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).

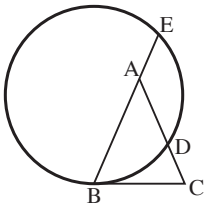
הבסיס BC נוגע במעגל בנקודה B. השוק AC

חותכת את המעגל בנקודה D. המשך השוק AB

חותך את המעגל בנקודה E. נתון: $BC = 6$ ס"מ,

$DC = 3$ ס"מ, $AE = 2.5$ ס"מ.

חשב את השוק AB.



תשובות (פרופורציות במעגל):

1) א. 3 או 12. ב. 8. ג. 3. 2) 9 ס"מ, 4 ס"מ. 3) א. 13 ס"מ.

ב. 12 ס"מ. 4) 13 ס"מ. 5) א. 8 ס"מ. ב. $\frac{4}{1}$. 6) 5 ס"מ. 7) א. 3.

ג. 2. 8) א. 9 ס"מ, 4 ס"מ. ב. 2.5 ס"מ. 9) 9 ס"מ. 11) 11 ס"מ, 19 ס"מ.

12) א. 6. ב. 11. ג. 3. 13) 8.5 ס"מ. 14) א. 16 ס"מ. ב. 10 ס"מ.

15) א. 4 ס"מ, 14 ס"מ. ב. 6 ס"מ. ג. 11.31 ס"מ. 16) א. 7. ב. 12. ג. $\frac{2}{3}$.

17) א. 5 ס"מ. ב. 2.2 ס"מ. 18) 4 ס"מ. 20) א. 7 ס"מ. ב. $\frac{56}{225}a^2$. 21) 3 : 4.

- (22) א. 2.4 ס"מ. ב. 3.2 ס"מ. ג. 3.84 סמ"ר. (23) א. 5. ב. 7. ג. 7.5.
- (24) א. 2 ס"מ, 6 ס"מ. ב. 4 ס"מ. א. $\frac{(a-b)^2}{a}$, $\frac{2ab-b^2}{a}$. (26) 8 ס"מ.
- (27) ב. (1) ΔFDE . (31) א. 2. ב. 6. ג. 2. (32) ב. 18.25 ס"מ. ג. 18.2 ס"מ.
- (35) 4.5 ס"מ או 8 ס"מ.

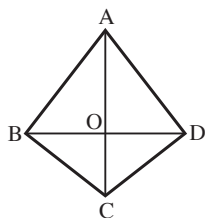
תרגילים לחזרה – פרופורציות במשולש ישר זווית ובמעגל

סיכום המושגים העיקריים של הפרק החמישה עשר:

משפט – במשולש ישר זווית הגובה ליתר מחלק את המשולש לשני משולשים דומים שכל אחד מהם דומה למשולש המקורי.
משפט – במשולש ישר זווית הגובה ליתר הוא הממוצע הגיאומטרי של היטלי הניצבים על היתר.
משפט הפוך – אם במשולש הגובה לאחת מהצלעות עובר בתוך המשולש והוא הממוצע הגיאומטרי של היטלי שתי הצלעות האחרות על צלע זו אז המשולש ישר זווית.
משפט (אוקלידס) – במשולש ישר זווית ניצב הוא הממוצע הגיאומטרי של היתר ושל היטלו של ניצב זה על היתר.
משפט – שני מיתרים במעגל הנחתכים בתוך המעגל מחלקים זה את זה כך שמכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.
משפט – אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.
משפט – אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

תרגילים לחזרה – פרופורציות במשולש ישר זווית ובמעגל

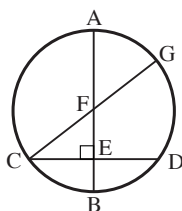
- (1) בטרפז שווה שוקיים האלכסונים מאונכים לשוקיים. גובה הטרפז הוא 12 ס"מ והבסיס הגדול הוא 25 ס"מ.
- חשב את ההיקף והשטח של הטרפז.



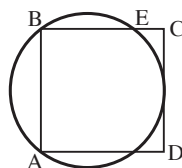
- (2) בדלתון ABCD ($AB = AD$, $BC = DC$)
 זווית הבסיס הן ישרות ($AB \perp BC$),
 ($AD \perp DC$). האלכסונים נחתכים בנקודה O.
 נתון: $AD = 10$ ס"מ, $CO = 4.5$ ס"מ.
 חשב את שטח הדלתון.

- (3) הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC. המשך הקטע AM חותך את הצלע BC בנקודה D. דרך הנקודות A, M ו-C עובר מעגל כך שהצלע BC משיקה למעגל C.
 הוכח: $2AD = \sqrt{3} BC$.

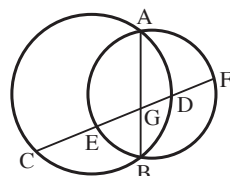
- (4) במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על האלכסון AC כך שמתקיים $BE \perp AC$.
 נתון: $AE = a$, $CE = b$, $AB = \sqrt{a^2 + ab}$.
 א. הוכח: המקבילית היא מלבן.
 ב. הבע את שטח המלבן באמצעות a ו-b.



- (5) AB הוא קוטר במעגל שחותך את המיתר CD בנקודה E ומאונך לו. המיתר CG חותך את AB בנקודה F. נתון: $CD = 16$ ס"מ, $BE = 4$ ס"מ, $CF = 10$ ס"מ.
 מצא איזו נקודה בציור היא מרכז המעגל והוכח את תשובתך.

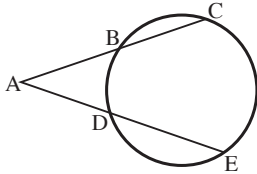


- (6) המרובע ABCD הוא ריבוע. הצלע AB היא מיתר במעגל. הצלע BC חותכת את המעגל בנקודה C. הצלע CD משיקה למעגל.
 א. הוכח שנקודת ההשקה של הצלע CD היא באמצע הצלע.
 ב. נתון שצלע הריבוע היא a. הבע באמצעות a את:
 (1) המיתר BE. (2) רדיוס המעגל.



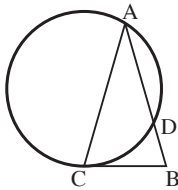
- (7) AB הוא מיתר המשותף לשני מעגלים. CD הוא מיתר במעגל הגדול שחותך את AB בנקודה G ואת המעגל הקטן בנקודה E. המשך CD חותך את המעגל הקטן בנקודה F.
 הוכח: $\frac{EG}{GD} = \frac{CE}{DF}$.

- (8) AB ו-CD הם מיתרים במעגל שנחתכים בנקודה E. נתון: $BE : AE = 9 : 10$, $CE : DE = 2 : 5$. מצא את היחס: $AB : CD$.



- (9) ABC ו-ADE הם חותכים למעגל. נתון: $AD = 4$ ס"מ, $DE = 6$ ס"מ. שטח המרובע BCED גדול פי 3 משטח המשולש ABD. א. חשב את AB ו-BC. ב. מהו אורכו של משיק למעגל היוצא מהנקודה A?

- (10) במשולש ישר זווית הגובה ליתר מחלק את היתר לשני קטעים. א. נתון שהיחס בין שני הקטעים הנ"ל $4 : 9$. מצא את היחס בין ניצבי המשולש. ב. (ללא קשר לנתון של סעיף א') נתון שהיחס בין שני הקטעים הנ"ל הוא $a : b$. הבע באמצעות a ו-b את היחס בין הניצבים.

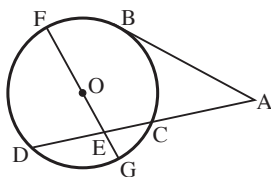


- (11) ABC הוא משולש שווה שוקיים. קודקוד הראש A נמצא על המעגל. השוק AB חותכת את המעגל בנקודה D. הבסיס BC משיק למעגל בנקודה C. נתון: $AD = 15$ ס"מ. והיקף המשולש ABC הוא 50 ס"מ. חשב את צלעות המשולש ABC.

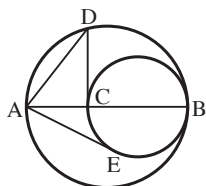
- (12) משני קודקודים נגדיים של מלבן (שהוא לא ריבוע) מורידים אנכים לאלכסון שלא עובר דרך הקודקודים. נקודות החיתוך של האנכים עם האלכסון מחלקות אותו לשלושה קטעים שהיחסים ביניהם הם $a : b : a$. הבע באמצעות a ו-b את היחס בין רוחב המלבן לאורך המלבן.

- (13) מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים משיק למעגל בנקודה B וחיתוך ACD. נתון: $AB \perp AD$, $AB = a$, $AC = b$ ($a > b$). הבע באמצעות a ו-b את רדיוס המעגל.

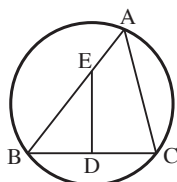
- (14) AB הוא מיתר במעגל. נקודה C נמצאת מחוץ למעגל על המשך המיתר AB מהצד של B. א. נתון: $AC \cdot BC = 9$ סמ"ר ורדיוס המעגל הוא 4 ס"מ. חשב את מרחק הנקודה C ממרכז המעגל. ב. (ללא קשר לנתון של סעיף א') נסמן $AC \cdot BC = d$ והרדיוס R. הבע באמצעות d ו-R את מרחק הנקודה C ממרכז המעגל.



- 15) AB הוא משיק למעגל שמרכזו O בנקודה B.
ACD הוא חותך למעגל שחותך את הקוטר FG בנקודה E. נתון: $AB = 6$ ס"מ, $AC = 4$ ס"מ, $OE = CE = 2$ ס"מ.
א. חשב את DE.
ב. חשב את רדיוס המעגל.



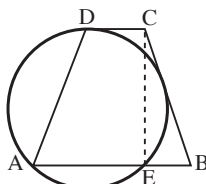
- 16) שני מעגלים משיקים מבפנים בנקודה B. AB הוא קוטר במעגל הגדול ו-BC הוא קוטר במעגל הקטן. AD הוא מיתר במעגל הגדול. DC ו-AE משיקים למעגל הקטן בנקודות C ו-E בהתאמה. הוכח: המשולש ADE הוא שווה שוקיים.



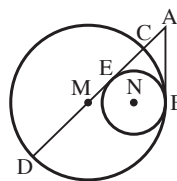
- 17) משולש ABC חסום במעגל. DE הוא אנך אמצעי לצלע BC. נתון: $BC = 12$ ס"מ, $BE = 10$ ס"מ, $AE = 4.4$ ס"מ.
חשב את רדיוס המעגל.

הערה: חלק מהתרגילים 18 – 28 הם קצת יותר קשים מהרגיל.

- 18) במרובע ABCD האלכסונים נחתכים בנקודה E. נתון: $AE \cdot CE = BE \cdot DE$.
הוכח: המרובע ABCD הוא בר חסימה.

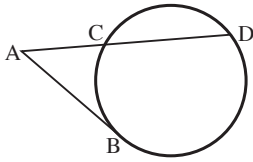


- 19) ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel DC$). הבסיס הקטן DC משיק למעגל בנקודה D. השוק BC משיקה גם היא למעגל. הבסיס AB חותך את המעגל בנקודה E. נתון: $DC = a$. וכן ש-CE הוא גובה בטרפז. הבע באמצעות a את:
א. הבסיס AB. (הדרכה: ניתן לראות הדרכה בתשובה לתרגיל).
ב. את השוק BC.



- 20) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N משיקים מבפנים בנקודה B. AB הוא משיק משותף למעגלים. ACD הוא חותך למעגל הגדול שמשיק למעגל הקטן בנקודה E ועובר דרך המרכז M של המעגל הגדול. נתון: $AB = 9$ ס"מ, $AC = 3$ ס"מ.
א. חשב את רדיוס המעגל הגדול.
ב. חשב את רדיוס המעגל הקטן.

(21) AB הוא משיק למעגל בנקודה B ו-ACD הוא חותך למעגל.



א. נתון: $AC : AB = 2 : 3$. מצא את היחסים

הבאים: (1) $AC : CD$ (2) $S_{ABC} : S_{BCD}$.

ב. (ללא קשר לנתון של סעיף א')

נתון: $AC : AB = k$

הוכח: $S_{ABC} : S_{BCD} = k^2 : (1 - k^2)$

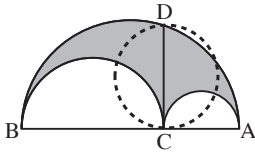
(22) בתוך חצי מעגל שקוטרו AB חסומים שני חצאי

מעגלים שהקטרים שלהם הם BC ו-AC והם

משיקים מבחוץ זה לזה ומבפנים לחצי המעגל

הגדול. הקטע CD ניצב לקוטר AB. (D נקודה

על קשת חצי המעגל).



הוכח: שטח המעגל שקוטרו CD שווה לשטח

האפור.

(23) בתוך משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) חסום

מלבן DEFG. BG הוא קוטר של חצי מעגל שחותך את

השוק AB בנקודה E. הבסיס BC שווה ל-a.

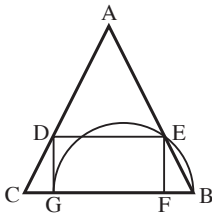
א. נתון שהגובה לבסיס שווה לבסיס.

הבע באמצעות a את רדיוס חצי המעגל.

ב. (ללא קשר לנתון של סעיף א')

נתון: $EF = \frac{6}{17}a$. מצא את היחס שבין הגובה

לבסיס לבין הבסיס.



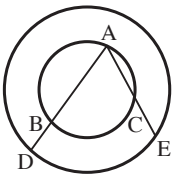
(24) שני המעגלים שבציור הם מעגלים בעלי מרכז

משותף. AB ו-AC הם מיתרים במעגל הקטן

שהמשכיהם חותכים את המעגל הגדול בנקודות

D ו-E בהתאמה.

הוכח: $AD \cdot BD = AE \cdot CE$.



(25) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B כך שהקטע

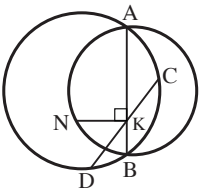
AB הוא קוטר במעגל הקטן. CD הוא מיתר במעגל

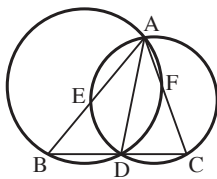
הגדול הנחצה ע"י AB בנקודה K. N היא נקודה

על המעגל הקטן כך ש-NK ניצב ל-AB.

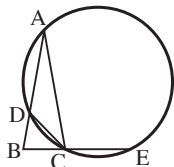
הוכח: א. $NK = DK$

ב. $\angle CND = 90^\circ$.

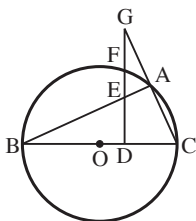




- 26** AD הוא חוצה הזווית BAC במשולש ABC. דרך A, B ו-D עובר מעגל שחותך את AC בנקודה F. דרך A, C ו-D עובר מעגל שחותך את AB בנקודה E. הוכח: $BE = CF$.



- 27** CD הוא חוצה הזווית ACB במשולש ABC שווה שוקיים ($AB = AC$). דרך הנקודות A, D ו-C עובר מעגל שחותך את המשך הצלע BC מהצד של C בנקודה E. הוכח: $AD = BE$.



- 28** ABC הוא משולש החסום במעגל שמרכזו O כך שהצלע BC היא קוטר. מהנקודה D שנמצאת בין C ל-O העלו אנך ל-BC שחותך את הצלע AB בנקודה E, את המעגל בנקודה F ואת המשך הצלע AC בנקודה G. הוכח: $DF^2 = DE \cdot DG$. (הדרכה: ניתן לראות הדרכה בתשובה לתרגיל).

תשובות (תרגילים לחזרה – פרופורציות במשולש ישר זווית ובמעגל):

- (1) 62 ס"מ, 192 סמ"ר. (2) 75 סמ"ר. (4) ב. $(a+b)\sqrt{ab}$. (6) ב. $\frac{3}{4}a$. (2) $\frac{5}{8}a$.
 (8) 19 : 21. (9) א. 5 ס"מ, 3 ס"מ. ב. 6.32 ס"מ. (10) א. 2 : 3. ב. $\sqrt{a} : \sqrt{b}$.
 (11) 20 ס"מ, 20 ס"מ, 10 ס"מ. (12) $\sqrt{\frac{a}{a+b}}$. (13) $\frac{a^2+b^2}{2b}$. (14) א. 5 ס"מ. ב. $\sqrt{R^2+d}$. (15) א. 3 ס"מ. ב. 3.16 ס"מ. (17) 7.5 ס"מ. (19) א. $3a$. (הדרכה: הורד גובה מהנקודה D). ב. $a(1+\sqrt{3})$. (20) א. 12 ס"מ. ב. 4.5 ס"מ. (23) א. $\frac{5}{12}a$.
 ב. 3 : 2 או 4 : 3. (28) הדרכה: הוכח תחילה שמתקיים $DF^2 = BD \cdot DC$.