

בני גורן

דמיון משולשים במעגל, פרופורציות במשולש ישר זווית ובמעגל
- הנדסת המישור

קובץ תרגילים לתלמידי 4 ו-5 יח"ל

קובץ זה מיועד לבתי ספר שמלמדים בכיתה י' מהספר מתמטיקה (4 ו-5 יח"ל) חלק א' שאלונים 804 ו-806 (כתום-אדום) ורוצים לסיים את כל החומר בהנדסת המישור בכיתה י'.

קובץ זה נגיש לכל התלמידים בחינם וניתן גם להדפיס אותו.
הערה: כל התרגילים שמופיעים בקובץ זה נלקחו מהספר מתמטיקה (4 ו-5 יח"ל) חלק ה' שאלון 005 (כחול-ירוק) ורצוי ללמד אותם בכיתה י"א.

כל החומר שבנושאים הנ"ל מופיע בצורה מאוד מפורטת בספר מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'-1 שאלון 804 (כתום-אפור) ובספר מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'-1 שאלון 806 (ירוק-אדום).

פירוט התרגילים:

בעמ' 180-190 התרגילים שכוללים **דמיון משולשים במעגל** הם התרגילים הבאים:
16-51.

בעמ' 191-194 התרגילים שכוללים **פרופורציות במשולש ישר זווית** הם התרגילים הבאים: 1-14 ובעמ' 199 התרגילים 45 ו-46.

בעמ' 194-200 התרגילים שכוללים **פרופורציות במעגל** (הנושא בתכנית רק ל-5 יח"ל) הם התרגילים הבאים: 41-15, 47-51.

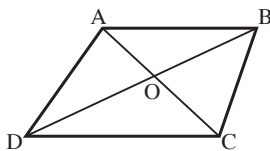
התרגילים מופיעים בהמשך לעמוד זה.

דמיון משולשים במרובעים ובמעגל סיכום המושגים העיקריים

משפט – הרדיוסים של מעגלים החוסמים משולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון שבין המשולשים.
משפט – הרדיוסים של מעגלים החוסמים במשולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון שבין המשולשים.

תרגילים (דמיון משולשים במרובעים ובמעגל)

דמיון משולשים במרובעים



(1) בטרפז ABCD שבו $AB \parallel DC$

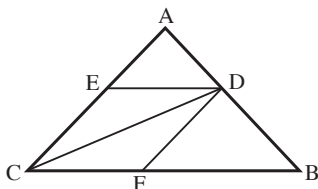
האלכסונים נחתכים בנקודה O.

א. הוכח: $\triangle AOB \sim \triangle COD$.

ב. נתון: $AO = 6$ ס"מ, $CO = 8$ ס"מ.

15 ס"מ $BD =$ חשב את BO. (הערה:

דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).



(2) CD הוא חוצה הזווית ACB במשולש ABC. הנקודות E ו-F

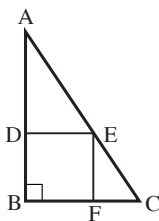
נמצאות על הצלעות כך שמתקיים: $DE \parallel BC$, $DF \parallel AC$.

א. הוכח שהמרובע EDFC הוא מעוין.

ב. הוכח: $\triangle AED \sim \triangle ACB$.

ג. נתון: $AC = 8$ ס"מ, $CB = 12$ ס"מ.

חשב את צלע המעוין.



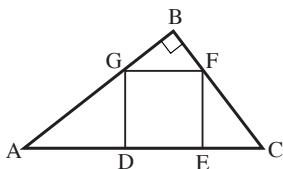
(3) בתוך משולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$)

חסום ריבוע DEFB. (ראה ציור).

א. נתון: $AC = \sqrt{117}$ ס"מ, $BC = 6$ ס"מ.

חשב את צלע הריבוע.

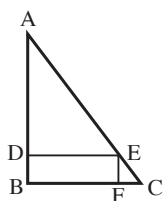
ב. מצא את שטח המשולש ADE.



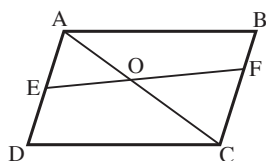
(4) בתוך משולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$)

חסום ריבוע DEFG כמתואר בציור.

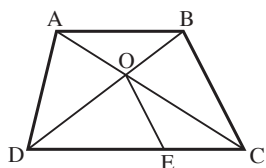
הוכח: $AD \cdot EC = DE^2$.



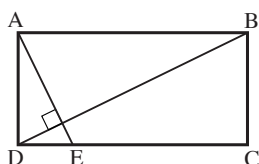
- 5 בתוך משולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$) חסום מלבן $DEFB$ כמתואר בציור.
 א. הוכח: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.
 ב. נתון: $AB = 10$ ס"מ, $BC = 6$ ס"מ, $BF = 3BD$.
 חשב את היקף המלבן ואת שטחו.
(הדרכה: סמן $BD = x$ ואז $BF = 3x$.)



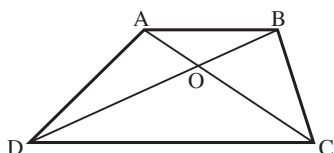
- 6 המרובע $ABCD$ הוא מקבילית. הנקודה E היא אמצע הצלע AD . הנקודה F מחלקת את הצלע BC ביחס של $1:2$, $BF:FC$. הקטע EF והאלכסון AC נחתכים בנקודה O .
 א. הוכח: $\triangle AEO \sim \triangle CFO$.
 ב. מצא את יחס הדמיון בין המשולש AEO למשולש CFO .



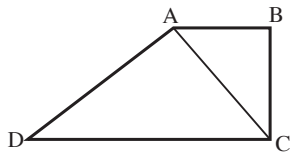
- 7 בטרפז $ABCD$ האלכסונים נחתכים בנקודה O . הנקודה E נמצאת על הבסיס DC כך שהקטע EO מקביל לשוק BC .
 א. הוכח: $\frac{DO}{OB} = \frac{DE}{EC}$.
 ב. נתון: $DE = 6$ ס"מ, $EC = 3$ ס"מ.
 חשב את הבסיס AB .



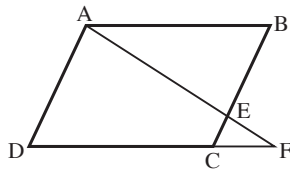
- 8 המרובע $ABCD$ הוא מלבן. הנקודה E נמצאת על הצלע DC כך שהקטע AE מאונך לאלכסון BD .
 א. הוכח: $\triangle ADE \sim \triangle DCB$.
 ב. נתון: $AD = 5$ ס"מ, $DC = 10$ ס"מ.
 חשב את DE .
 ג. (ללא קשר לנתונים של סעיף ב').
 הוכח: $AD^2 = DE \cdot DC$.



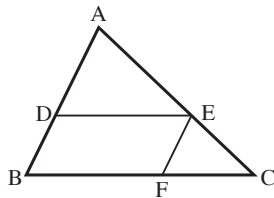
- 9 האלכסונים בטרפז $ABCD$ שבו $AB \parallel DC$ נחתכים בנקודה O . נתון: $AB = 7$ ס"מ, $S_{AOB} = 8$ סמ"ר, $S_{COD} = 50$ סמ"ר.
 א. חשב את DC .
 ב. חשב את שטח הטרפז.
(הדרכה: מצא תחילה את גובה הטרפז בעזרת שטחי המשולשים הנ"ל.)



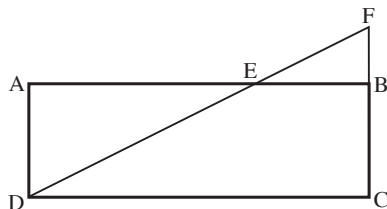
- 10** ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel DC$), $\angle B = 90^\circ$. נתון: $AC^2 = AB \cdot DC$.
 א. הוכח: $AC \perp AD$.
 ב. נתון: $\angle D = 30^\circ$. נסמן: $S_{ABCD} = S$.
 הבע באמצעות S את שטחי המשולשים ABC ו-ADC.



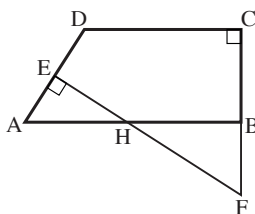
- 11** במקבילית ABCD הנקודה E מחלקת את הצלע BC ביחס של $CE : EB = 1 : 3$. המשך הקטע AE חותך את המשך הצלע DC בנקודה F. נתון ששטח המשולש ECF הוא 2 סמ"ר.
 מצא את שטח המקבילית ABCD.



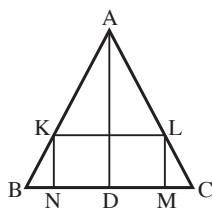
- 12** בתוך משולש ABC חסומה מקבילית DEFB. נתון: $DE = 2BD$, $AD : BD = 3 : 2$.
 חשב את היחס בין הצלע AB לצלע BC.



- 13** במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AB. המשך DE והמשך BC נחתכים בנקודה F. נתון: $AD = 2$ ס"מ, $DC = 6$ ס"מ. נסמן: $AE = x$.
 א. הבע באמצעות x את BF.
 ב. מצא את x אם סכום שטחי המשולשים ADE ו-BEF הוא 5 סמ"ר.

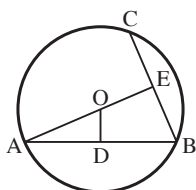


- 14** ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD$), $\angle C = 90^\circ$. הנקודה F נמצאת על המשך השוק הקצרה BC כך שהקטע EF הוא אנך אמצעי לשוק הארוכה AD. נתון: $AB = 18$ ס"מ, $DC = 12$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ.
 חשב את הקטע BF. (הדרכה: מהנקודה D הורד גובה DG לבסיס AB. חשב את AD והיעזר במשולשים ADG ו-AHE).

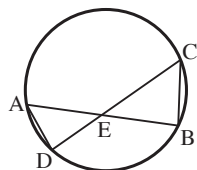


- 15** במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) חסום מלבן $KLMN$ כך שהאלכסון KM שלו מאונך לשוק AB . AD הוא חוצה זווית הראש A . נתון: $AD = BC$.
 א. הוכח: $BN = \frac{1}{2} KN$.
 ב. הוכח: $\triangle BNM \sim \triangle KMN$.
 ג. נתון: $BN = 3$ ס"מ. חשב את NM .

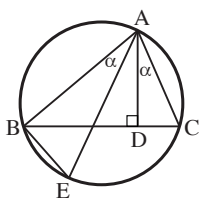
דמיון משולשים במעגל – מיתרים וזוויות



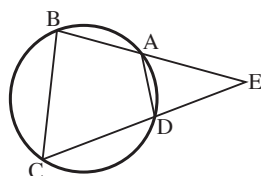
- 16** AB ו- BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O . הנקודות D ו- E הן בהתאמה אמצעי המיתרים AB ו- BC . הקטע AE עובר דרך המרכז O .
 א. הוכח: $OD \perp AB$, $AE \perp BC$.
 ב. $\triangle ADO \sim \triangle AEB$.



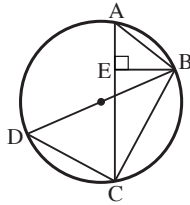
- 17** AB ו- CD הם שני מיתרים במעגל הנחתכים בנקודה E .
 א. הוכח: $\triangle ADE \sim \triangle CBE$.
 ב. נתון: $AD = 8$ ס"מ, $AE = 12$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ. מצא עפ"י הנתונים הנ"ל את הקטע שניתן לחשב את אורכו וחשב את אורכו.



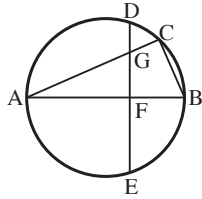
- 18** המשולש ABC חסום במעגל. AD הוא הגובה לצלע BC והוא יוצר זווית α עם הצלע AC . המיתר AE יוצר זווית α עם הצלע AB .
 א. הוכח: $\triangle ADC \sim \triangle ABE$.
 ב. מה ניתן לומר על המיתר AE ? נמק.



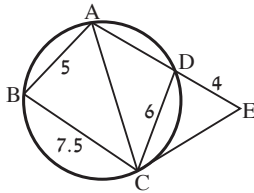
- 19** המרובע $ABCD$ חסום במעגל. המשכי הצלעות AB ו- DC נחתכים בנקודה E .
 א. הוכח: $\triangle ADE \sim \triangle CBE$.
 ב. נתון: $AE = 6$ ס"מ, $AB = 4$ ס"מ, $DE = 5$ ס"מ. חשב את CD .



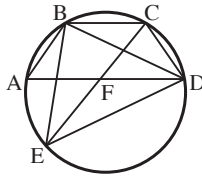
- 20** הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על המעגל.
 BD הוא קוטר. הקטע BE מאונך למיתר AC.
 א. הוכח: $\triangle ABE \sim \triangle DBC$.
 ב. נתון: $DC = 12$ ס"מ, $AB = 5$ ס"מ.
 ורדיוס המעגל 10 ס"מ. חשב את AE ו-BE.



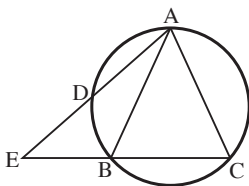
- 21** המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AB היא קוטר. הקוטר AB חוצה את המיתר DE בנקודה F. המיתר DE חותך את הצלע AC בנקודה G. נתון: $AG = 6$ ס"מ, $GC = 1.5$ ס"מ, $BF = 4$ ס"מ.
 מצא את AF ואת רדיוס המעגל.



- 22** המרובע ABCD חסום במעגל. הנקודה E נמצאת על המשך הצלע AD.
 א. היעזר בנתונים שבציור והוכח: $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.
 ב. נתון: $AC = 8$ ס"מ. חשב את CE.
 ג. נסמן: $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCE = \beta$.
 הבע את זווית ACB באמצעות α ו- β .

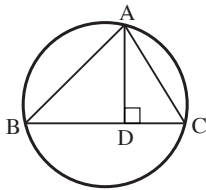


- 23** ABCD הוא טרפז החסום במעגל ($BC \parallel AD$).
 E נקודה על המעגל (ראה ציור). המיתר CE חותך את המיתר AD בנקודה F.
 הוכח: $\triangle BED \sim \triangle CDF$.

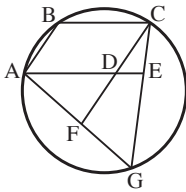


- 24** המשולש ABC שחסום במעגל הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). הנקודה D היא נקודה כלשהי על הקשת הקטנה בין A ל-B. המשך המיתר AD נפגש עם המשך הבסיס BC בנקודה E.
 א. הוכח: $\triangle ADB \sim \triangle ABE$.
 ב. נתון: $AC = 12$ ס"מ, $DE = 7$ ס"מ. חשב את AD.

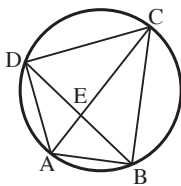
- 25** משולש שווה שוקיים ABC בעל זווית ראש חדה שבו $AB = AC$ חסום במעגל שמרכזו O. AD הוא קוטר במעגל שחותך את הבסיס BC בנקודה E. F היא נקודה על השוק AC כך ש-FO מאונך ל-AC.
 א. הוכח: $\triangle AFO \sim \triangle AEC$.
 ב. נתון: $AE = 6.4$ ס"מ, $DE = 3.6$ ס"מ. חשב את AF.



- 26** AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC החסום במעגל.
נתון: $AC = 10$ ס"מ, $AB = 12$ ס"מ, $DC = 6$ ס"מ.
חשב את קוטר המעגל.
(הדרכה: העבר קוטר דרך הנקודה A).

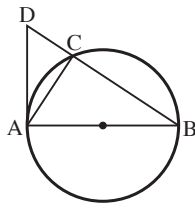


- 27** המרובע ABCD הוא מקבילית. (הקודקודים A, B ו-C נמצאים על המעגל). G היא נקודה כלשהי על הקשת הגדולה AC. המשך הצלע AD נפגש עם המיתר CG בנקודה E. המשך הצלע DC נפגש עם המיתר AG בנקודה F.
א. הוכח: $\triangle ADF \sim \triangle AGE$
ב. הוכח: $\triangle CDE \sim \triangle CGF$

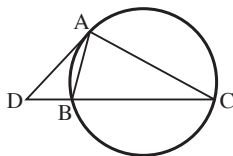


- 28** ABCD הוא מרובע החסום במעגל שאלכסוניו נחתכים בנקודה E. נתון: $AB \cdot BC = AD \cdot DC$.
הוכח: $DE = BE$.
(רמז: ראה תרגיל 17 בעמ' 183).

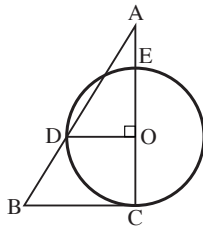
דמיון משולשים במעגל – משיק אחד



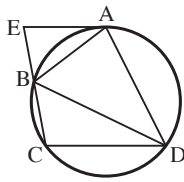
- 29** ABC הוא משולש החסום במעגל כך שהצלע AB היא קוטר. הנקודה D נמצאת על המשך הצלע BC כך שהקטע AD משיק למעגל בנקודה A.
הוכח: א. $\triangle ABC \sim \triangle DBA$
ב. $\triangle ABC \sim \triangle DAC$



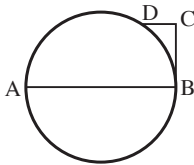
- 30** המשולש ABC חסום במעגל. הנקודה D נמצאת על המשך הצלע BC כך שהקטע AD משיק למעגל בנקודה A.
א. הוכח: $\triangle ABD \sim \triangle CAD$
ב. נתון: $AD = 4$ ס"מ, $DC = 8$ ס"מ. חשב את BC.



- 31** הצלע AC של משולש ABC חותכת את המעגל בנקודות E ו-C ועוברת דרך המרכז O. הצלע BC משיקה למעגל בנקודה C. D היא אחת מנקודות החיתוך של הצלע AB עם המעגל. (ראה ציור). נתון: $DO \perp AC$.
 א. הוכח: $\triangle ADO \sim \triangle ABC$.
 ב. נתון: $AE = 3$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.

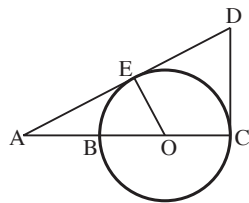


- 32** המרובע ABCD חסום במעגל. הנקודה E נמצאת על המשך הצלע BC כך שהקטע AE מקביל לצלע CD ומשיק למעגל בנקודה A.
 א. הוכח: $\triangle ABD \sim \triangle EBA$.
 ב. הוכח: AB חוצה את זווית DBE.
 ג. נתון: $EB = a$, $BD = b$. הבע באמצעות a ו-b את AB.

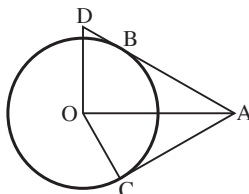


- 33** AB הוא קוטר במעגל. CB משיק למעגל בנקודה B. D היא נקודה על המעגל כך ש-CD מקביל ל-AB.
 א. הוכח: $BD^2 = AB \cdot CD$.
 ב. נתון: $AB = 20$ ס"מ, $CD = 5$ ס"מ. חשב את שטח הטרפז ABCD.

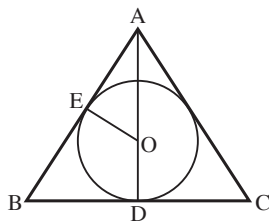
דמיון משולשים במעגל – שני משיקים



- 34** מהנקודה A יוצאים חותך ABC למעגל שעובר דרך המרכז O ומשיק AE המשיק למעגל בנקודה E. הנקודה D נמצאת על המשך המשיק AE כך שהקטע CD משיק למעגל בנקודה C.
 א. הוכח: $\triangle AOE \sim \triangle ADC$.
 ב. נתון: $DC = 16$ ס"מ, $BC = 20$ ס"מ. מצא את יחס הדמיון בין המשולש AOE למשולש ADC.
 ג. מהו היחס בין שטח המשולש AOE לשטח המרובע EOCD?

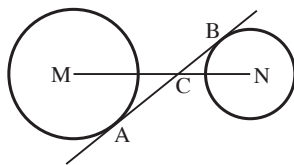


- 35** AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-C. הנקודה D נמצאת על המשך הקטע AB כך שהקטע DO מאונך לקטע AO.
 א. הוכח ששני המשולשים שבציור דומים.
 ב. נתון: $AD = 10$ ס"מ, $DB = 2$ ס"מ. חשב את AO.

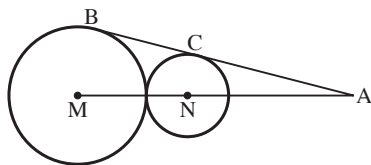


- (36)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) והוא חוסם מעגל שמרכזו O. E ו-D הן שתיים מנקודות ההשקה.
 א. הוכח: $\triangle AOE \sim \triangle ABD$.
 ב. נתון: $AB = 17$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.

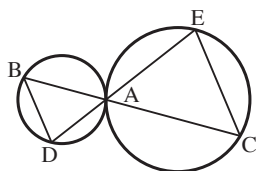
דמיון משולשים במעגל – שני מעגלים



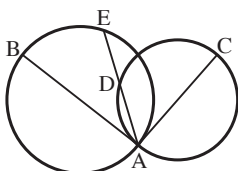
- (37)** AB הוא משיק פנימי בנקודות A ו-B למעגלים שמרכזיהם M ו-N. קטע המרכזים MN חותך את AB בנקודה C ואורכו 24 ס"מ. רדיוס המעגל השמאלי הוא 7 ס"מ ורדיוס המעגל הימני הוא 5 ס"מ.
 חשב את אורכי הקטעים MC ו-NC.



- (38)** שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N משיקים זה לזה מבחוץ. AB הוא משיק חיצוני המשיק לשני המעגלים בנקודות B ו-C. נתון: $MN = 8$ ס"מ, $AN = 12$ ס"מ. חשב את הרדיוסים של המעגלים.



- (39)** שני מעגלים משיקים מבחוץ בנקודה A. דרך הנקודה A עוברים ישרים החותכים את המעגלים בנקודות B, C, D ו-E.
 הוכח: $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$.



- (40)** אחת מנקודות החיתוך של שני מעגלים היא הנקודה A. AB ו-AC הם קטרים המאונכים זה לזה. ישר העובר דרך A חותך מעגל אחד בנקודה D ומעגל שני בנקודה E.
 א. הוכח: $AD \cdot AE = BE \cdot DC$.
 ב. נתון: $DE = 8$ ס"מ, $BE = 15$ ס"מ. חשב את AD ואת AE.
 ג. חשב את הרדיוס של כל אחד מהמעגלים.

דמיון משולשים במעגל – משיק (בעיות שונות)

41 שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. AC הוא מיתר

במעגל הימני שמשק למעגל השמאלי בנקודה A.

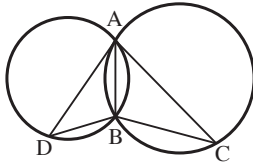
AD הוא מיתר במעגל השמאלי שמשק למעגל הימני

בנקודה A.

א. הוכח: $\triangle ADB \sim \triangle CAB$.

ב. נתון: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 20$ ס"מ.

חשב את BD.



42 AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות

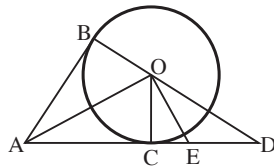
B ו-C. המשך הרדיוס BO חותך את המשך

AC בנקודה D. E היא נקודה על AD כך ש-EO

חוצה את זווית COD.

א. הוכח: $\triangle ABO \sim \triangle AOE$.

ב. $\triangle DEO \sim \triangle DOA$.



43 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).

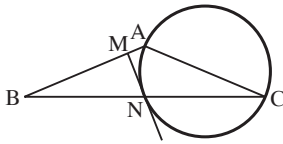
הצלע AC היא קוטר במעגל והצלע BC חותכת

את המעגל בנקודה N. M היא נקודה על הצלע

AB כך שהקטע MN משיק למעגל בנקודה N.

הוכח: $MN \perp AB$.

(הדרכה: העבר את המיתר AN).



44 במשולש ABC חסום חצי מעגל כך שהקוטר EF

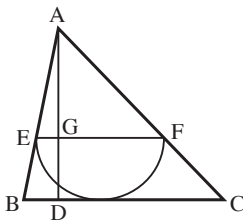
מקביל לצלע BC. AD הוא הגובה לצלע BC

והוא חותך את הקוטר EF בנקודה G.

א. הוכח: $\frac{AG}{AD} = \frac{EF}{BC}$.

ב. נתון: $AD = 10$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ.

חשב את קוטר חצי המעגל.



45 AD הוא חוצה הזווית BAC במשולש ABC.

דרך הנקודה A עובר מעגל שחותך את המשולש

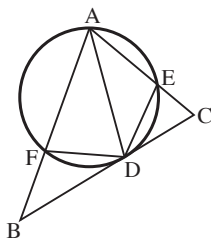
בנקודות E ו-F כך שהצלע BC משיקה למעגל

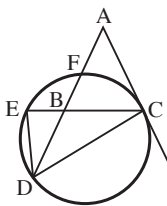
בנקודה D.

א. הוכח: $\triangle AFD \sim \triangle DEC$.

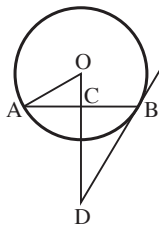
ב. $DE^2 = AF \cdot CE$.

ג. $\angle ADB = \angle C + \angle EDC$.





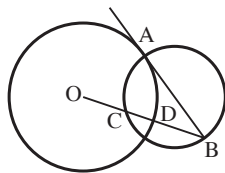
46 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
 השוק AC משיקה למעגל בנקודה C. השוק AB
 חותכת את המעגל בנקודה F והמשכה חותך אותו
 בנקודה D. המשך הבסיס BC חותך את המעגל
 בנקודה E. הוכח:
 א. $\triangle DBE \sim \triangle CDE$. ב. $DE^2 = CE \cdot BE$. ג. $\widehat{DE} = \widehat{EF}$.



47 AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O. הנקודה C היא אמצע המיתר AB. הנקודה D נמצאת על המשך OC כך שהקטע DB משיק למעגל בנקודה B.

א. הוכח: שני המשולשים שבציור דומים.

ב. נתון: $24 \text{ ס"מ} = AB$, $25 \text{ ס"מ} = OD$.
חשב את רדיוס המעגל.

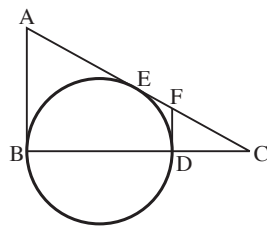


48 AB הוא קוטר במעגל הימני והוא משיק למעגל השמאלי שמרכזו O בנקודה A. הקטע OB חותך את המעגל הימני בנקודה C ואת המעגל השמאלי בנקודה D. נתון: $4 \text{ ס"מ} = BC$ ורדיוס המעגל הימני 2.5 ס"מ .

א. הוכח: $\triangle AOB \sim \triangle CAB$.

ב. חשב את רדיוס המעגל השמאלי.

ג. חשב את CD.



(49) הצלעות AB ו-AC של משולש ABC משיקות למעגל בנקודות B ו-E בהתאמה. הצלע BC עוברת דרך מרכז המעגל וחותכת אותו בנקודה D. F היא נקודה על AC כך שהקטע FD משיק למעגל בנקודה D. נתון:

20 ס"מ = AC, 5 ס"מ = FC.

א. חשב את AB ו-FD. (רמז: שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה).

ב. חשב את רדיוס המעגל.

הוכחת משפטים – דמיון משולשים במרובעים ובמעגל

(50) הוכח את המשפט :

הרדיוסים של מעגלים החוסמים משולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון שבין המשולשים.

(ראה בספר הנדסה חלק ב' בעמ' 501).

הרדיוסים של מעגלים החסומים במשולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון שבין המשולשים.

(ראה בספר הנדסה חלק ב' את תרגיל 22 בעמ' 511).

תשובות (דמיון משולשים במרובעים ובמעגל):

- 1) ב. 6.43 ס"מ. 2) ג. 4.8 ס"מ. 3) א. 3.6 ס"מ. ב. 9.72 סמ"ר. 5) ב. $13\frac{1}{3}$ ס"מ, $8\frac{1}{3}$ סמ"ר. 6) ב. 3 : 4. 7) ב. 4.5 ס"מ. 8) ב. 2.5 ס"מ. 9) א. 17.5 ס"מ. ב. 98 סמ"ר. 10) ב. $\frac{1}{5}S, \frac{4}{5}S$. 11) 48 סמ"ר. 12) 3 : 4. 13) ב. 4 ס"מ או 4.5 ס"מ. 14) 7.25 ס"מ. 15) ג. 12 ס"מ. 17) ב. 15 ס"מ = CE. 18) ב. קוטר. 19) ב. 7 ס"מ. 21) 5 ס"מ, 4.5 ס"מ. 22) ב. 6.4 ס"מ. ג. $180^\circ - \alpha + \beta$. 24) ב. 9 ס"מ. 25) ב. 4 ס"מ. 26) 15 ס"מ. 30) ב. 6 ס"מ. 31) ב. 6 ס"מ. 33) 108.25 סמ"ר. 34) ב. 8 : 5. ג. 39 : 25. 35) ב. 8.94 ס"מ. 36) ב. 4.8 ס"מ. 37) 14 ס"מ, 10 ס"מ. 38) 3 ס"מ, 5 ס"מ. 40) ב. 12 ס"מ, 20 ס"מ. ג. 10 ס"מ, 12.5 ס"מ. 41) ב. 7.2 ס"מ. 44) ב. 7.5 ס"מ. 47) ב. 15 ס"מ או 20 ס"מ. 48) ב. 3.75 ס"מ. ג. 1.5 ס"מ. 49) א. 12 ס"מ, 3 ס"מ. ב. 6 ס"מ.

פרופורציות במשולש ישר זווית ובמעגל, דמיון מצולעים

סעיף זה כולל תרגילים עם פרופורציות במשולש ישר זווית, פרופורציות במעגל ומצולעים דומים. הסברים, דוגמאות ותרגילים נוספים מופיעים בספר הנדסה חלק ב' בעמ' 525–557.

פרופורציות במשולש ישר זווית ובמעגל, דמיון מצולעים סיכום המושגים העיקריים

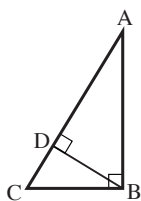
משפט – במשולש ישר זווית הגובה ליתר מחלק את המשולש לשני משולשים דומים שכל אחד מהם דומה למשולש המקורי.
משפט – במשולש ישר זווית הגובה ליתר הוא הממוצע הגיאומטרי של היטלי הניצבים על היתר.
משפט הפוך – אם במשולש הגובה לאחת מהצלעות עובר בתוך המשולש והוא הממוצע הגיאומטרי של היטלי שתי הצלעות האחרות על צלע זו אז המשולש ישר זווית.

משפט (אוקלידס) – במשולש ישר זווית ניצב הוא הממוצע הגיאומטרי של היתר ושל היטלו של ניצב זה על היתר.
משפט – שני מיתרים במעגל הנחתכים בתוך המעגל מחלקים זה את זה כך שמכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.
משפט – אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.
משפט – אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.
מצולעים דומים – שני מצולעים שזוויותיהם שוות בהתאמה וצלעותיהם המתאימות פרופורציוניות.
משפט – היקפי מצולעים דומים מתייחסים זה לזה כיחס הדמיון שבין המצולעים.
משפט – שטחי מצולעים דומים מתייחסים זה לזה בריבוע יחס הדמיון שבין המצולעים.

תרגילים

(פרופורציות במשולש ישר זווית ובמעגל, דמיון מצולעים)

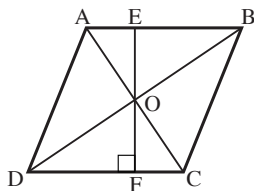
במשולש ישר זווית הגובה ליתר הוא הממוצע הגיאומטרי של היטלי הניצבים על היתר



- (1) BD הוא הגובה ליתר AC במשולש ישר זווית ABC
($AB \perp CB$)

א. נתון: $AD = 18$ ס"מ, $CD = 8$ ס"מ. חשב את שטח המשולש ABC בעזרת היתר והגובה ליתר.
ב. (ללא קשר לנתונים של סעיף א').

נתון: $AC = 30$ ס"מ, $S_{ABC} = 180$ סמ"ר. חשב את הגובה DB ואת הקטעים AD ו-CD. ($CD < AD$).

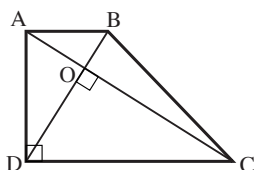


- (2) ABCD הוא מעוין שאלכסונו

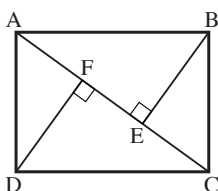
נחתכים בנקודה O. EF הוא גובה העובר דרך הנקודה O.

נתון: $DF = 8$ ס"מ, $EF = 12$ ס"מ.

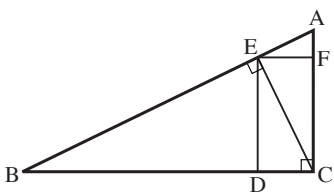
חשב את שטח המעוין.



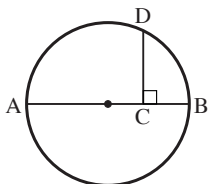
- 3) בטרפז ישר זווית ABCD ($AD \perp DC$, $AB \parallel DC$) האלכסונים נחתכים בנקודה O והם ניצבים זה לזה. נתון: $BO = 4$ ס"מ, $DO = 9$ ס"מ.
- א. חשב את האלכסון AC.
- ב. חשב את שטח הטרפז.
- (הערה: אין צורך למצוא את הגובה והבסיסים).



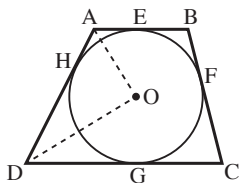
- 4) המרובע ABCD הוא מלבן. מהקודקודים B ו-D הורידו אנכים BE ו-DF לאלכסון AC. נתון: $EF = 7$ ס"מ, $BE = 12$ ס"מ.
- א. חשב את שטח המלבן.
- (הדרכה: סמן $CE = x$ ומצא תחילה את x).
- ב. חשב את היקף המלבן.



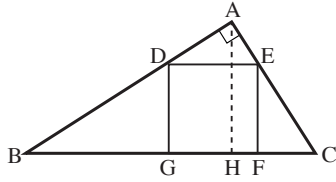
- 5) בתוך משולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) חסום מלבן CDEF. האלכסון CE של המלבן מאונך ליתר AB. נתון: $EF = 3$ ס"מ, $BD = 27$ ס"מ.
- א. מצא את הצלע FC של המלבן.
- ב. חשב את שטח המשולש ABC.



- 6) AB הוא קוטר במעגל. C נקודה כלשהי על AB. D נקודה על המעגל כך ש-DC מאונך ל-AB.
- א. הוכח: $CD^2 = AC \cdot CB$.
- ב. נתון: $DC = 9$ ס"מ, $AC = 18$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.



- 7) ABCD הוא טרפז שבו $AB \parallel DC$ והוא חוסם מעגל שמרכזו O ורדיוסו R. נקודות ההשקה הן: E, F, G, H.
- הוכח:
- א. $\angle AOD = 90^\circ$.
- ב. $AH \cdot DH = R^2$. (הדרכה: חבר את O עם H).
- ג. $AH \cdot DH = BF \cdot CF$.
- ד. $\frac{AE}{BE} = \frac{CG}{DG}$. (רמז: שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה).



8) במשולש ישר זווית ABC ($\angle A = 90^\circ$)

חסום ריבוע $DEFG$. נתון:

$FC = 5$ ס"מ, $BG = 20$ ס"מ.

א. חשב את צלע הריבוע.

(הדרכה: הוכח: $\triangle BDG \sim \triangle ECF$).

ב. נתון ש- AH הוא הגובה ליתר BC .

חשב את AH .

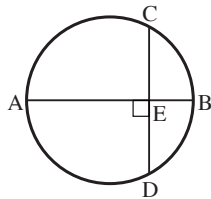
ג. חשב את הקטעים BH ו- CH . ($BH > CH$).

אם גובה לצלע במשולש הוא ממוצע גיאומטרי של היטלי שתי הצלעות על הצלע אז המשולש ישר זווית

9) AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC . (הגובה עובר בתוך המשולש).

נתון: $BD = 5$ ס"מ, $DC = 20$ ס"מ ושטח המשולש ABC הוא 125 סמ"ר.

הוכח: המשולש ABC הוא ישר זווית.



10) AB ו- CD הם שני מיתרים במעגל

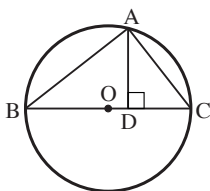
המאונכים זה לזה שנחתכים בנקודה E .

נתון: $AE \cdot BE = CE^2$.

הוכח: א. AB הוא קוטר במעגל.

ב. $CE = DE$.

במשולש ישר זווית ניצב הוא הממוצע הגיאומטרי של היתר ושל היטל הניצב על היתר (משפט אוקלידס)



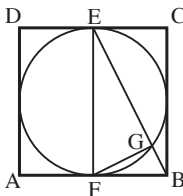
11) משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו

25 ס"מ ומרכזו O כך שהצלע BC

היא קוטר. AD הוא הגובה לצלע BC .

נתון: $OD = 7$ ס"מ.

חשב את AC ואת AD .



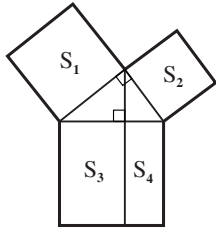
12) $ABCD$ הוא ריבוע החוסם מעגל.

E ו- F הן שתיים מנקודות ההשקה.

הקטע BE חותך את המעגל

בנקודה G .

הוכח: $BF^2 = BE \cdot BG$.

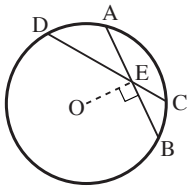


- 13) על הצלעות של משולש ישר זווית בנו ריבועים. המשך הגובה ליתר מחלק את הריבוע שבנוי על היתר לשני מלבנים.
הוכח: $S_2 = S_4$, $S_1 = S_3$.

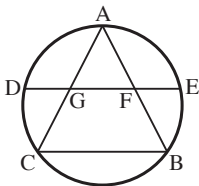
- 14) במשולש ישר זווית הגובה ליתר מחלק את היתר לשני קטעים שהיחס ביניהם הוא $a : b$. הבע באמצעות a ו- b את היחס בין ניצבי המשולש.

אם שני מיתרים נחתכים במעגל אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני

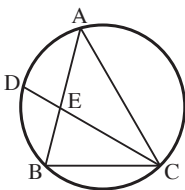
- 15) AB ו- CD הם שני מיתרים במעגל הנחתכים בנקודה E . נתון: $AE = 3$ ס"מ, $BE = 20$ ס"מ, $CE = 19$ ס"מ, $DE = 9$ ס"מ. חשב את CE ו- DE . ($CE < DE$).



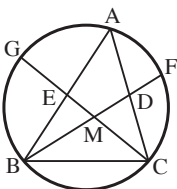
- 16) במעגל שמרכזו O עוברים שני מיתרים AB ו- CD שנחתכים בנקודה E . הקטע OE מאונך למיתר AB . נתון: $CE = 4$ ס"מ, $DE = 9$ ס"מ. חשב את אורך המיתר AB .



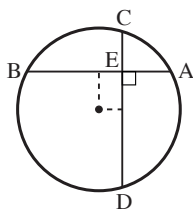
- 17) ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) החסום במעגל. המיתר DE חוצה את הצלעות AB ו- AC בנקודות E ו- G . נתון: $BC = 10$ ס"מ, $DE = 13$ ס"מ. חשב את אורך השוק AC .



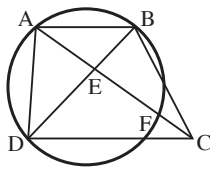
- 18) המשולש ABC חסום במעגל. המיתר CD חוצה את זווית ACB וחותך את AB בנקודה E . נתון: $\frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$, $AB = 16$ ס"מ, $DE = 5$ ס"מ. חשב את CE .



- 19) המשולש ABC חסום במעגל. BD ו- CE הם תיכונים במשולש שנחתכים בנקודה M . F ו- G הן בהתאמה נקודות החיתוך של המשכי התיכונים עם המעגל. נתון: $AC = 12$ ס"מ, $DF = 3$ ס"מ, $MC = 6$ ס"מ. חשב את GE .

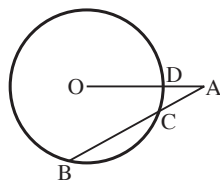


- 20** AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל המאונכים זה לזה שנחתכים בנקודה E.
נתון: $BE = 9$ ס"מ, $CD = 15$ ס"מ.
ומרחק המיתר AB מהמרכז הוא 4.5 ס"מ.
א. חשב את אורך המיתר AB.
ב. מצא את מרחק המיתר CD מהמרכז.

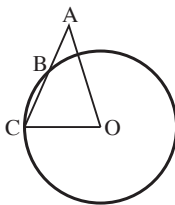


- 21** ABCD הוא טרפז ($AB \parallel DC$) ששלושה מקודקודיו נמצאים על המעגל. אלכסוני הטרפז נחתכים בנקודה E. האלכסון AC חותך את המעגל גם בנקודה F.
הוכח: $CE \cdot EF = DE^2$.

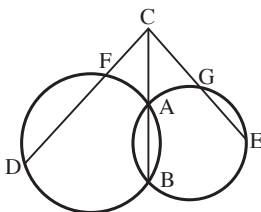
אם שני חותכים למעגל יוצאים מאותה נקודה אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני



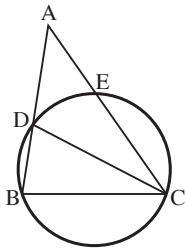
- 22** ACB הוא חותך למעגל שמרכזו O. הקטע AO חותך את המעגל בנקודה D.
נתון: $AC = 3$ ס"מ, $BC = 9$ ס"מ, $AO = 10$ ס"מ.
א. חשב את רדיוס המעגל.
ב. חשב את מרחק המיתר BC ממרכז המעגל.



- 23** המשולש ACO הוא שווה שוקיים ($AC = AO$). הנקודה O היא מרכז המעגל. השוק AC חותכת את המעגל בנקודות B ו-C. נתון: $CO = 6$ ס"מ, $AO = 9$ ס"מ.
חשב את הקטעים AB ו-CB.



- 24** AB הוא המיתר המשותף לשני מעגלים. הנקודה C נמצאת על המשך AB. ה-CD ו-CGE הם חותכים למעגלים.
א. הוכח: $CD \cdot CF = CE \cdot CG$.
ב. נתון: $CF = 4$ ס"מ, $DF = 6$ ס"מ.
חשב את GE.

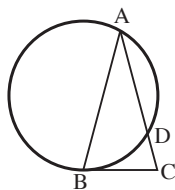


- 25** הצלע BC של משולש ABC היא מיתר במעגל. הצלעות AB ו-AC חותכות את המעגל בהתאמה בנקודות D ו-E. המיתר DC הוא חוצה הזווית C במשולש ABC. צלעות המשולש ABC הן: $AB = 10$ ס"מ, $AC = 12$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ. א. חשב את CE. ב. שרטט בציור את המיתר BE וסמן ב-F את נקודת החיתוך שלו עם CD. נתון: $BE = a$. הבע באמצעות a את המכפלה $DF \cdot CF$.

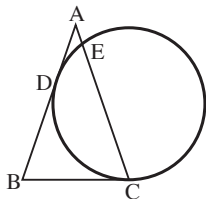
- 26** ABC ו-ADE הם שני חותכים למעגל היוצאים מנקודה A מחוץ למעגל. נתון: $AB : BC = 2 : 1$, $AD : DE = 3 : 5$. חשב את היחס $AC : AE$.

אם חותך ומשיק למעגל יוצאים מאותה נקודה אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק

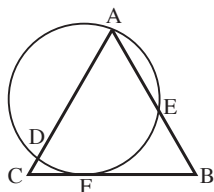
- 27** נקודה נמצאת במרחק של 29 ס"מ ממרכזו של מעגל שרדיוסו 21 ס"מ. מהו אורך משיק למעגל היוצא מהנקודה הנ"ל?



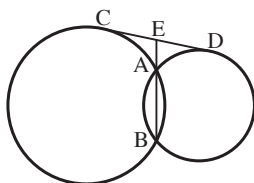
- 28** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). הנקודה A נמצאת על המעגל. הצלע AC חותכת את המעגל בנקודה D. הצלע BC נוגעת במעגל בנקודה B. נתון: $AB = 8$ ס"מ, $BC = 4$ ס"מ. א. חשב את CD ו-AD. ב. חשב את BD.



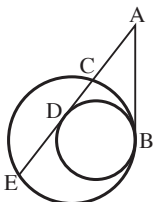
- 29** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) והוא משיק למעגל בנקודות C ו-D. השוק AC חותכת את המעגל בנקודה E. נתון: $AC = 25$ ס"מ, $BC = 15$ ס"מ. חשב את AE ואת CE.



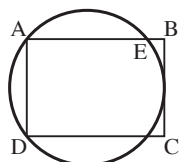
- 30** המשולש ABC הוא שווה צלעות. הנקודה A נמצאת על המעגל. D ו-E הן נקודות החיתוך של הצלעות AC ו-AB עם המעגל. F היא נקודת ההשקה של הצלע BC. נתון: $AE = 5$ ס"מ, $BE = 4$ ס"מ. חשב את אורך המיתר AD.



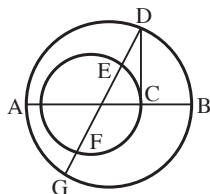
- 31** AB הוא המיתר המשותף לשני מעגלים.
 CD הוא משיק המשותף לשני המעגלים
 בנקודות C ו-D. המשך AB חותך את
 CD בנקודה E.
 א. הוכח: הנקודה E היא אמצע CD.
 ב. נתון: $CD = BE$. הוכח: $AE = \frac{1}{4} CD$.



- 32** AB הוא משיק המשותף לשני מעגלים
 בנקודה B. ACE הוא חותך למעגל
 הגדול שמשיק למעגל הקטן בנקודה D.
 נתון: $CD = 2$ ס"מ, $ED = 3$ ס"מ.
 חשב את AB.

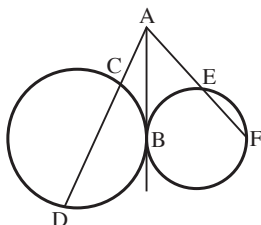


- 33** המרובע ABCD הוא מלבן. הצלע AD היא
 מיתר במעגל. הצלע AB חותכת את המעגל
 בנקודה E. הצלע BC משיקה למעגל.
 נתון: $AB = 16$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ.
 א. חשב את AE ואת קוטר המעגל.
 ב. שרטט בציור את האלכסון BD וסמן
 את נקודת החיתוך שלו עם המעגל ב-F.
 חשב את DF.



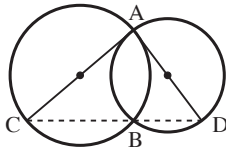
- 34** AB הוא קוטר במעגל הגדול והוא עובר דרך
 מרכז המעגל הקטן. C היא נקודה על AB
 ו-D היא נקודה על המעגל הגדול כך שהקטע
 DC משיק למעגל הקטן בנקודה C. המיתר
 DG חותך את המעגל הקטן בנקודות E ו-F.
 הוכח: $AC \cdot BC = DF \cdot DE$.

בעיות שונות — פרופורציות במשולש ישר זווית ובמעגל

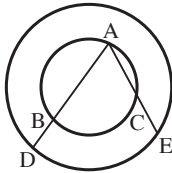


- 35** AB הוא משיק המשותף לשני מעגלים המשיקים
 מבחוץ בנקודה B. ACD הוא חותך למעגל השמאלי
 ו-AEF הוא חותך למעגל הימני.
 א. הוכח: $AC \cdot AD = AE \cdot AF$.
 ב. נתון: $AD = 15$ ס"מ, $AE = 6$ ס"מ,
 $AC = EF$. חשב את AB.

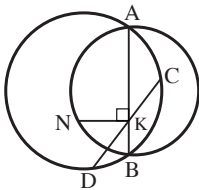
- 36** CD הוא התיכון לצלע AB במשולש ABC. דרך הנקודות A, D ו-C עובר מעגל כך שהצלע BC נוגעת במעגל בנקודה C. הוכח: $AB = \sqrt{2} BC$.



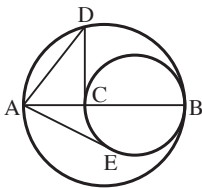
- 37** שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. AC ו-AD הם קטרים במעגלים המאונכים זה לזה. הוכח: הנקודות C, B ו-D נמצאות על ישר אחד. ב. נסמן: $CB = m$, $BD = n$. הבע באמצעות m ו-n את שטח המשולש ACD ואת הרדיוסים של המעגלים.



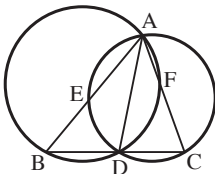
- 38** שני המעגלים שבציור הם מעגלים בעלי מרכז משותף. הם מיתרים במעגל הקטן שהמשכיהם חותכים את המעגל הגדול בנקודות D ו-E בהתאמה. הוכח: $AD \cdot BD = AE \cdot CE$.



- 39** שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B כך שהקטע AB הוא קוטר במעגל הקטן. CD הוא מיתר במעגל הגדול הנחצה ע"י AB בנקודה K. N היא נקודה על המעגל הקטן כך ש-NK ניצב ל-AB. הוכח: א. $NK = DK$. ב. $\angle CND = 90^\circ$. (הדרכה: היעזר בתכונה של הגובה ליתר במשולש ישר זווית ובתכונה של מיתרים במעגל).

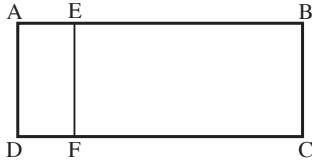


- 40** שני מעגלים משיקים מבפנים בנקודה B. AB הוא קוטר במעגל הגדול ו-BC הוא קוטר במעגל הקטן. AD הוא מיתר במעגל הגדול. DC ו-AE משיקים למעגל הקטן בנקודות C ו-E בהתאמה. הוכח: המשולש ADE הוא שווה שוקיים.

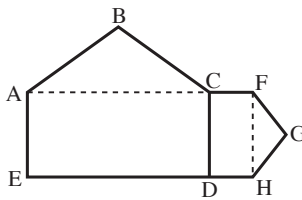


- 41** AD הוא חוצה הזווית BAC במשולש ABC. דרך A, B ו-D עובר מעגל שחותך את AC בנקודה F. דרך A, C ו-E עובר מעגל שחותך את AB בנקודה E. הוכח: $BE = CF$. (הדרכה: היעזר בתכונת חוצה הזווית במשולש. שים לב שמהנקודות B ו-C יוצאים חותכים למעגלים).

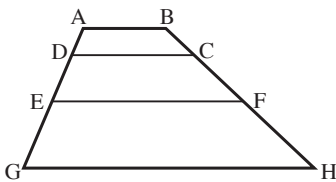
דמיון מצולעים



- 42** במלבן ABCD העבירו קטע EF המקביל לצלע AD וכך התקבלו שני מלבנים AEFD ו-EFCB הדומים זה לזה. נתון: $AD = 10$ ס"מ, $AB = 25$ ס"מ. חשב את הקטע AE. ($AE < BE$)



- 43** המחומשים ABCDE ו-FGHDC מורכבים ממלבן וממשולש שווה שוקיים והם דומים זה לזה. נתון: $AE = 4$ ס"מ, $EH = 10$ ס"מ, $AB = 5$ ס"מ. ($ED > DH$)
א. חשב את GH.
ב. מהו היחס בין שטח המחומש ABCDE לשטח המחומש FGHDC?



- 44** הטרפזים ABCD, DCFE ו-EFHG דומים זה לזה. נתון: $AB = 8$ ס"מ, $DC = 12$ ס"מ.
א. חשב את EF ו-GH.
ב. מהו היחס בין היקף הטרפז ABCD להיקף הטרפז DCFE?
ג. מהו היחס בין שטח הטרפז ABCD לשטח הטרפז EFGH?

הוכחת משפטים – פרופורציות במשולש ישר זווית ובמעגל, דמיון מצולעים

- 45** הוכח את המשפט:

- א) במשולש ישר זווית הגובה ליתר מחלק את המשולש לשני משולשים דומים שכל אחד מהם דומה למשולש המקורי.
ב) במשולש ישר זווית הגובה ליתר הוא הממוצע הגיאומטרי של היטלי הניצבים על היתר.
(ראה בספר הנדסה חלק ב' בעמ' 525).

- 46** הוכח את המשפט (משפט אוקלידס):

- במשולש ישר זווית ניצב הוא הממוצע הגיאומטרי של היתר ושל היטלו של ניצב זה על היתר.
(ראה בספר הנדסה חלק ב' בעמ' 528).

(47) הוכח את המשפט :

שני מיתרים במעגל הנחתכים בתוך המעגל מחלקים זה את זה כך שמכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.
(ראה בספר הנדסה חלק ב' בעמ' 534).

(48) הוכח את המשפט :

אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.
(ראה בספר הנדסה חלק ב' בעמ' 535).

(49) הוכח את המשפט :

אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.
(ראה בספר הנדסה חלק ב' בעמ' 536).

(50) הוכח :

אם נקודה נמצאת בתוך מעגל שרדיוסו R במרחק d ממרכזו אז מכפלת קטעי המיתרים הנחתכים בנקודה זו היא גודל קבוע השווה ל- $R^2 - d^2$.

(51) הוכח :

אם נקודה נמצאת מחוץ למעגל שרדיוסו R במרחק d ממרכזו אז מכפלת החותכים היוצאים מנקודה זו בחלקם החיצוני היא גודל קבוע השווה ל- $d^2 - R^2$.

תשובות (פרופורציות במשולש ישר זווית ובמעגל, דמיון מצולעים):

- (1) א. 156 סמ"ר. ב. 12 ס"מ, 24 ס"מ, 6 ס"מ. (2) 150 סמ"ר. (3) א. 19.5 ס"מ.
ב. 126.75 סמ"ר. (4) א. 300 סמ"ר. ב. 70 ס"מ. (5) א. 9 ס"מ. ב. 150 סמ"ר.
(6) ב. 11.25 ס"מ. (8) א. 10 ס"מ. ב. 14 ס"מ. ג. 28 ס"מ, 7 ס"מ. (11) 30 ס"מ,
24 ס"מ. (14) $\sqrt{\frac{a}{b}}$. (15) 4 ס"מ, 15 ס"מ. (16) 12 ס"מ. (17) 12 ס"מ. (18) 12 ס"מ.
(19) $6\frac{1}{3}$ ס"מ. (22) א. 8 ס"מ. ב. 6.61 ס"מ. (23) 5 ס"מ, 4 ס"מ. (24) ב. 5 ס"מ.
(25) א. 7 ס"מ. ב. $\frac{56}{225}a^2$. (26) 3 : 4. (27) 20 ס"מ. (28) א. 2 ס"מ, 6 ס"מ.
ב. 4 ס"מ. (29) 4 ס"מ, 21 ס"מ. (30) 8 ס"מ. (32) 6 ס"מ. (33) א. 13.75 ס"מ,
18.25 ס"מ. ב. 1.8 ס"מ. (35) ב. $\sqrt{60}$ ס"מ. (37) ב. $\frac{\sqrt{mn(m+n)}}{2}$, $S_{ACD} =$
(42) 5 ס"מ. (43) א. 2.5 ס"מ. ב. 1 : 4. (44) א. 18 ס"מ,
27 ס"מ. ב. 3 : 2. ג. 16 : 81.