

בני גורן

פונקציות רציונאליות- חשבון דיפרנציאלי

קובץ תיאוריה ותרגילים עם פונקציות רציונאליות לתלמידי 5 יח"ל

קובץ זה מיועד לבתי ספר שמלמדים בכיתה י' מהספר מתמטיקה (4 ו-5 יח"ל) חלק א' שאלונים 804 ו-806 (כתום-אדום) ורוצים ללמד את כל החומר של פונקציות רציונאליות בכיתה י'.

קובץ זה נגיש לכל התלמידים בחינם וניתן גם להדפיס אותו.

הערה: כל החומר שמופיע בקובץ זה נלקח מהספר מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'-2 שאלון 806 (אפור-צהוב) ורצוי ללמד אותו בכיתה י"א.

התרגילים מופיעים בהמשך לעמוד זה.

פרק שני

חשבון דיפרנציאלי – פונקציות רציונאליות

תחום ההגדרה – פונקציות רציונאליות

כפי שראינו, פונקציה רציונאלית היא פונקציה שהיא מנה של שני פולינומים. נזכיר מהו תחום ההגדרה של פונקציה רציונאלית:

פונקציה רציונאלית מוגדרת לערכי x שעבורם המכנה של הפונקציה שונה מאפס.

דוגמא:

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $y = \frac{x+1}{x^2-x-12}$.

פתרון:

אם נשווה את המכנה לאפס נקבל את המשוואה הריבועית $x^2-x-12 = 0$. פתרונות המשוואה הם: $x_1 = 4$, $x_2 = -3$ ולכן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq -3$, $x \neq 4$.

תרגילים

(תחום ההגדרה – פונקציות רציונאליות)

תחום ההגדרה – פונקציות רציונאליות

מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות הרציונאליות הבאות:

$$y = \frac{x-1}{x^2+4x-5} \quad (3) \qquad y = \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x+3} \quad (2) \qquad y = \frac{x}{x-2} \quad (1)$$

$$y = \frac{3x}{x^2+1} \quad (6) \qquad y = \frac{(x-4)}{(x-4)(x-5)} \quad (5) \qquad y = \frac{x+2}{2x^2-3x-5} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{6x^3 + 7x^2 - 3x} \quad (9)$$

$$y = \frac{x}{x^3 - x} \quad (8)$$

$$y = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \quad (7)$$

$$y = \frac{x-1}{x^4 - x^2 - 2} \quad (12)$$

$$y = \frac{1}{x^4 - 5x^2 + 4} \quad (11)$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^4 - 9x^2} \quad (10)$$

$$(13) \quad \text{נתונות הפונקציות} \quad g(x) = \frac{1}{x+3}, \quad f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x+3)}$$

האם הפונקציות זהות? נמק את תשובתך.

מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציות הרציונאליות הבאות:

$$y = \frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 9} \quad (16)$$

$$y = \frac{x^2 - 5x}{x^2 + x} \quad (15)$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} \quad (14)$$

קבע אילו מהפונקציות הבאות הן אי זוגיות ואילו הן זוגיות:

$$y = \frac{x^2}{x^3 + 2x} \quad (19)$$

$$y = \frac{x^3 - x}{x} \quad (18)$$

$$y = \frac{x}{x^2 - 1} \quad (17)$$

תחום ההגדרה – פונקציות רציונאליות עם פרמטרים

$$(20) \quad \text{תחום ההגדרה של הפונקציה} \quad f(x) = \frac{x-b}{x^2 + bx + c} \quad \text{הוא} \quad x \neq 6, \quad x \neq 1.$$

א. מצא את b ו- c .

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

$$(21) \quad \text{נתונה הפונקציה:} \quad f(x) = \frac{x+2a}{x^2 - 4ax + 3a^2} \quad (a \neq 0).$$

הבע באמצעות a את:

א. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

הערה: בתרגיל 22 צריך להיעזר בחקירה פשוטה של משוואה ריבועית.

$$(22) \quad \text{נתון שהפונקציה} \quad f(x) = \frac{x^2 + b}{x^2 + bx + 2b} \quad (b \neq 0) \quad \text{אינה מוגדרת עבור ערך אחד בלבד של} \quad x.$$

א. מצא את b .

ב. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .

ג. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? נמק.

הבע באמצעות a , לגבי הפונקציות שבתרגילים הבאים, את:

(א) תחום ההגדרה.

(ב) נקודות החיתוך עם הצירים.

$$(23) \quad a > 0, y = \frac{x+1}{(x-a)^2} \quad (24) \quad a > 1, y = \frac{x^2-1}{x^2-a^2} \quad (25) \quad a \neq 0, y = \frac{x-3}{x^2-2ax}$$

תשובות (תחום ההגדרה – פונקציות רציונאליות):

- (1) $x \neq 2$ (2) $x \neq -3, x \neq 0$ (3) $x \neq 1, x \neq -5$ (4) $x \neq 2\frac{1}{2}, x \neq -1$ (5) $x \neq 4$,
 (6) $x \neq 5$ (7) כל x (8) $x \neq 0, x \neq \pm 1$ (9) $x \neq 0, x \neq \frac{1}{3}, x \neq -\frac{1}{2}$ (10) $x \neq 0$,
 (11) $x \neq \pm 3$ (12) $x \neq \pm 2$ (13) $x \neq \pm \sqrt{2}$ (14) $(0, -4), (2, 0), (-2, 0)$,
 (15) $(5, 0)$ (16) $(0, -2), (6, 0)$ (17) אי זוגית. (18) זוגית. (19) אי זוגית.
 (20) א. $c = 6, b = -7$ ב. $(0, \frac{7}{6}), (-7, 0)$ (21) א. $x \neq a, x \neq 3a$ ב. $(-2a, 0)$,
 (22) א. $(0, \frac{2}{3a})$ ב. $(0, \frac{1}{2})$ ג. לא. (23) א. $x \neq a$ ב. $(0, \frac{1}{a^2}), (-1, 0)$,
 (24) א. $x \neq \pm a$ ב. $(0, \frac{1}{a^2}), (1, 0), (-1, 0)$ (25) א. $x \neq 0, x \neq 2a$ ב. אם $a \neq 1\frac{1}{2}$
 אז $(3, 0)$, אם $a = 1\frac{1}{2}$ אז אין חיתוך עם הצירים.

משיק – פונקציות רציונאליות

נביא דוגמא למשיק עם פונקציה רציונאלית.

דוגמא:

נתונה הפונקציה $y = \frac{ax}{x^2+bx}$ שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(-1, 1)$ הוא $-\frac{1}{2}$. מצא את הפונקציה.

פתרון:

אם נציב את שיעורי הנקודה $(-1, 1)$ בפונקציה נקבל $1 = \frac{-a}{1-b}$ ולכן משוואה ראשונה היא: $a-b = -1$. כדי להיעזר בנתון על השיפוע נגזור את הפונקציה.

נקבל: $y' = \frac{a(x^2+bx) - ax(2x+b)}{(x^2+bx)^2}$ אם נציב $x = -1$ ונשווה ל- $-\frac{1}{2}$ נקבל:

$$\frac{a(1-b)+a(-2+b)}{(1-b)^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{לכן משוואה שנייה היא: } 2a = (1-b)^2$$

פתרונות המערכת של שתי המשוואות שקיבלנו הם: $a = 2$ ו- $b = 3$ או $a = 0$

ו- $b = 1$. לכן הפונקציה היא $y = \frac{2x}{x^2+3x}$ (הפתרון שבו $a = 0$ לא ייתכן).

תרגילים (משיק – פונקציות רציונאליות)

שיפוע המשיק – פונקציות רציונאליות

מצא לגבי הפונקציות הבאות :

(א) את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שרשומה לידה.

(ב) את הזווית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

$x = 1, y = \frac{x}{(x-2)^2} \quad (2)$	$x = -1, y = \frac{1-x^2}{x-3} \quad (1)$
$x = -3, y = \frac{x^2+x-1}{x+1} \quad (4)$	$x = 0, y = \frac{x^2-4x}{x^2-x+2} \quad (3)$

מצא את הנקודות על גרף הפונקציה שהמשיק בהן הוא בעל שיפוע נתון m :

$m = -\frac{1}{3}, y = \frac{2x-3}{x-3} \quad (6)$	$m = 0, y = \frac{x-1}{x^2+3} \quad (5)$
$m = -\frac{1}{4}, y = \frac{x^2+1}{x-2} \quad (8)$	$m = \frac{3}{4}, y = \frac{x^2+x+1}{x+1} \quad (7)$

משוואת המשיק – פונקציות רציונאליות

מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הרשומה לידה :

$x = 1, y = \frac{2x^2+1}{x-2} \quad (10)$	$x = -2, y = \frac{x-1}{x+1} \quad (9)$
$x = 1, y = \frac{x}{x^2+x-1} \quad (12)$	$x = 2, y = \frac{x^2}{x^2-2} \quad (11)$

מצא את משוואות שני המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות ששיעור ה- y שלהן רשום לידה :

$y = 1, y = \frac{x^2-x}{x+3} \quad (14)$	$y = 1, y = \frac{1}{x^2-3x+1} \quad (13)$
(15) א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $y = \frac{x^2+x-2}{x}$ עם ציר ה-x. ב. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה בנקודות החיתוך הנ"ל.	

מצא את משוואות המשיקים לגרפים של הפונקציות הבאות עפ"י השיפוע m :

$m = -2, y = \frac{x^2+3}{x} \quad (17)$	$m = -4, y = \frac{x-5}{1-x} \quad (16)$
--	--

18) לגרף הפונקציה $y = \frac{x-4}{x+5}$ העבירו משיק בנקודה $x = -11$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא משיק נוסף לגרף הפונקציה שמקביל למשיק שמצאת בסעיף א'.

19) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = 2 - \frac{1}{x}$ בנקודה שנמצאת ברביע השני,

שמקביל לישר העובר דרך הנקודות $(-6, 3)$ ו- $(2, 5)$.

20) מצא את משוואות שני המשיקים לגרף הפונקציה $y = \frac{x+3}{x+1}$ שמאונכים לישר

$$2x - y = 5$$

21) המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x}{x+1}$ בנקודה מסוימת מקביל למשיק לגרף הפונקציה

$$y = \frac{x-1}{x+3}$$

בנקודה בעלת אותו שיעור x .

א. מצא את שיעור ה- x של נקודות ההשקה (מצא את שתי האפשרויות).

ב. עבור ה- x החיובי שמצאת בסעיף א' מצא את המשוואות של שני המשיקים.

22) לגרף הפונקציה $y = \frac{5x}{4} + \frac{1}{x}$ ברביע הראשון העבירו משיק בנקודה A ומשיק בנקודה B.

שני המשיקים מאונכים זה לזה. נתון ששיעור ה- x של הנקודה A גדול פי 3 משיעור ה- x של הנקודה B.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B אם נתון ששיעור ה- x של הנקודה A הוא מספר שלם.

ב. מצא את משוואות שני המשיקים עבור הנקודות A ו-B שמצאת בסעיף א'.

משיק עם פרמטרים – פונקציות רציונאליות

23) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x^2+ax}{x+1}$ בנקודה $x = 1$ הוא 2.

א. מצא את a .

ב. מצא את משוואת המשיק בנקודה $x = 1$.

24) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = ax^2 + \frac{1}{x+2}$ בנקודה $x = -1$ הוא 3.

א. מצא את a .

ב. מצא את משוואת המשיק בנקודה $x = -1$.

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > -2$. מצא את הזווית

שהמשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $x = 1$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

25) המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x+a}{x+2}$ בנקודה $x = -5$ יוצר זווית של 45° עם הכיוון

החיובי של ציר ה- x .

א. מצא את a .

ב. מצא את משוואות שני המשיקים לגרף הפונקציה שיוצרים זווית של 45° עם הכיוון

החיובי של ציר ה- x .

(26) המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{ax-5}{x^2-3x+1}$ בנקודה $x = 3$ יוצר זווית של 135° עם

הכיוון החיובי של ציר ה- x .

א. מצא את a .

ב. מצא את משוואת המשיק.

(27) המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x+a}{x+1}$ בנקודה $x = 3$ מאונך לישר $y-4x+3=0$.

א. מצא את a .

ב. מצא את שתי הנקודות על גרף הפונקציה שהמשיקים בהן מאונכים לישר הנ"ל.

(28) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x^2-6}{x+a}$ בנקודה $x = 1$ הוא 3.

א. מצא את שני הערכים האפשריים של a .

ב. הראה שעבור ה- a הקטן מבין השניים שמצאת בסעיף א' אין משיק לגרף הפונקציה

שמאונך לישר $x = 5$.

(29) שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{a}{x^2-1}$ בנקודה $x = 2$ שווה לשיפוע הפונקציה

$g(x) = \frac{a-5}{x} + 3$ בנקודה $x = 1$.

א. מצא את a .

ב. הראה שהמשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = 2$ הוא גם המשיק לגרף

הפונקציה $g(x)$ בנקודה $x = 1$ ומצא את משוואת המשיק המשותף.

ג. $h(x)$ היא פונקציה שמקיימת $h'(x) = f(x)$ בתחום $x > 1$. ישר ששיפועו 3

משיק לגרף הפונקציה $h(x)$. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

(30) א. הראה ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}$ בנקודה $x = 1$ הוא 3.

ב. רשום את משוואת המשיק בנקודה $x = 1$ בעזרת a .

ג. מצא את a אם המשיק עובר דרך הנקודה $(2, 5)$. (הנקודה לא על גרף הפונקציה).

(31) לגרף הפונקציה $y = \frac{1}{x}$, ברביע הראשון, העבירו משיק

בנקודה $(a, \frac{1}{a})$.

א. הבע באמצעות a את שיעורי נקודות החיתוך של

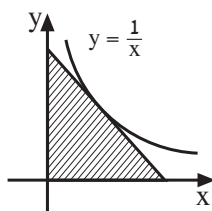
המשיק עם הצירים.

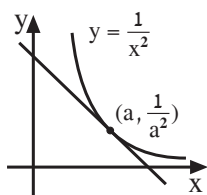
ב. הראה ששטח המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים

לא תלוי ב- a ומצא אותו.

ג. מצא את נקודת ההשקה אם סכום אורכי הקטעים

שהמשיק חותך מהצירים הוא 5.





32 לגרף הפונקציה $y = \frac{1}{x^2}$ העבירו משיק ברביע

הראשון בנקודה $(a, \frac{1}{a^2})$.

א. הבע באמצעות a את שיעורי נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

ב. מצא את a עבורו המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים הוא שווה שוקיים.

ג. (ללא קשר לסעיף ב'). שטח המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים מסתובב סביב ציר ה- y וכך נוצר חרוט ישר שמרכזו בסיסו הוא בראשית הצירים. הוכח שנפח החרוט לא תלוי בנקודת ההשקה וחשב את נפחו.

משיק – בעיות שונות (פונקציות רציונליות)

33 שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{ax^2+b}{x+3}$ בנקודה $x = -6$ הוא $\frac{4}{3}$.

מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .

34 נתונה הפונקציה: $y = \frac{x-a}{x-b}$ ($a \neq 0$, $a \neq b$). ידוע שהמשיקים לגרף הפונקציה

בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים המקבילים זה לזה.

הוכח: $a = 2b$.

35 ישר ששיפועו -3 משיק לגרף הפונקציה $y = \frac{ax^2}{x+b}$ בנקודה $(1, -1)$.

א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה שמקביל למשיק הני"ל.

36 שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{ax}{x^2-bx-6}$ בנקודה $(2, -1)$ הוא $-\frac{5}{6}$.

מצא את הפונקציה.

37 הישר $y = ax-3$ משיק לגרף הפונקציה $y = \frac{2x-3}{x+1}$.

מצא את a ואת נקודת ההשקה.

בתרגילים הבאים נתונות פונקציה (מימין) ונקודה **שלא** על גרף הפונקציה (משמאל). מצא את נקודות ההשקה ואת משוואות המשיקים לגרף הפונקציה שעוברים דרך הנקודה:

38 $y = \frac{1}{x}$, $(3, -1)$ **39** $y = \frac{x+1}{x-1}$, $(0, 7)$

40 הישר שמשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x^2+x+a}{x^2+x-2}$ בנקודה $x = -1$ חותך את ציר ה- x בנקודה $x = 2$.

מצא את a .

(41) לגרף הפונקציה $y = \frac{x+a}{x+1}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = 1$. נתון שהמשיק עובר דרך הנקודה $(5, 3)$. מצא את a .

(42) המשיקים לגרף הפונקציה $y = \frac{ax+b}{x+1}$ בנקודות החיתוך שלה עם הצירים יוצרים זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x . מצא את משוואות שני המשיקים אם ידוע שהפונקציה לא עוברת דרך ראשית הצירים.

(43) הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ו- $g(x) = \frac{x^n}{2n}$ ($n \neq 0$) נחתכים בזווית ישרה. א. מצא את n . ב. מצא את שיפועי שני המשיקים לפונקציות העוברים דרך נקודת החיתוך שברביע הראשון.

(44) $f(x)$ היא פונקציה שהנגזרת שלה היא הפונקציה: $f'(x) = \frac{x-a}{x^2+1}$. א. הראה שלכל ערך של a המשיק לגרף הפונקציה $f'(x)$ בנקודה $x = 0$ יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x . ב. הבע באמצעות a את משוואת המשיק הנ"ל בנקודה $x = 0$. ג. הראה שכאשר $a \neq 0$ המשיק חותך את הפונקציה $f'(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x . ד. מצא את a אם שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = 1.5$ הוא 2.

(45) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x-a^2}{x}$ ($a > 0$) בנקודה A שעל הגרף הוא 4. א. הבע את שיעורי נקודת ההשקה A בעזרת a אם נתון שהנקודה A נמצאת מימין לציר ה- y . ב. הבע את משוואת המשיק בעזרת a . ג. מצא את משוואת המשיק אם שטח המשולש, שהמשיק יוצר עם הצירים, הוא $\frac{9}{8}$. ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$. חשב את הזווית שהמשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $x = \frac{1}{4}$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(46) הוכח: לא קיים משיק לגרף הפונקציה $y = \frac{3x^2-1}{x+2}$ שעובר דרך ראשית הצירים.

(47) ישר שמשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x^2+2}{x}$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 2$. חשב את שטח המשולש שהמשיק הנ"ל יוצר עם הצירים.

48 מצא את משוואת המשיק המשותף לגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = -\frac{1}{x}$.

49 לגרפים של הפונקציות $f(x) = x^3$ ו- $g(x) = -\frac{3}{x}$ העבירו משיק משותף. נקודות ההשקה הן ברביעים הראשון והרביעי בהתאמה.

מצא את הזווית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

תשובות (משיק – פונקציות רציונאליות):

- 1 א. $-\frac{1}{2}$ ב. 153.43° 2 א. 3 ב. 71.565° 3 א. -2 ב. 116.565° 4 א. $1\frac{1}{4}$
- 5 $(3, \frac{1}{6})$, $(-1, -\frac{1}{2})$ 6 $(0, 1)$, $(6, 3)$ 7 $(1, 1\frac{1}{2})$, $(-3, -3\frac{1}{2})$
- 8 $(0, -\frac{1}{2})$, $(4, 8\frac{1}{2})$ 9 $y = 2x + 7$ 11 $y = -2x + 6$ 12 $y = -2x + 3$
- 13 $y = 3x + 1$, $y = -3x + 10$ 14 $y = -2x - 1$, $y = \frac{2}{3}x - 1$ 15 א. $(1, 0)$, $(-2, 0)$
- ב. $y = 3x - 3$, $y = 1.5x + 3$ 16 $y = -4x - 5$, $y = -4x + 11$ 17 $y = -2x + 6$
- 18 $y = -2x - 6$ 19 $y = \frac{1}{4}x + 3$ 20 $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$ 21 א. $1, -\frac{5}{3}$
- ב. $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ 22 א. $A(2, 3)$, $B(\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3})$ ב. $y = x + 1$, $y = -x + 3$
- 23 א. 5 ב. $y = 2x + 1$ 24 א. -2 ב. $y = 3x + 2$ ג. 120.96° 25 א. -7
- ב. $y = x - 3$, $y = x + 9$ 27 א. 5 ב. $(3, 2)$, $(-5, 0)$ 28 א. -2, $\frac{2}{3}$ 29 א. 9
- ב. $y = -4x + 11$ ג. 2 30 ב. $y = 3x + a - 4$ ג. 3 א. $(2a, 0)$, $(0, \frac{2}{a})$ ב. 2
- ג. $(2, \frac{1}{2})$ או $(\frac{1}{2}, 2)$ 32 א. $(0, \frac{3}{a^2})$, $(1.5a, 0)$ ב. $\sqrt[3]{2}$ ג. $2\frac{1}{4}\pi$ 33 $(0, -4)$
- 35 ב. $y = -3x + 18$ 36 $y = \frac{3x}{x^2 - 2x - 6}$ 37 $a = 5$, $(0, -3)$ 38 $(1, 1)$, $y = -x + 2$
- $(-3, -\frac{1}{3})$ ו- $y = -\frac{1}{9}x - \frac{2}{3}$ 39 $(2, 3)$ ו- $y = -2x + 7$; $(\frac{2}{3}, -5)$ ו- $y = -18x + 7$ 40 -6
- 41 -3 42 $y = x - 2$, $y = x + 2$ 43 א. 4 ב. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$ 44 ב. $y = x - a$ ד. -5
- 45 א. $(\frac{a}{2}, 1 - 2a)$ ב. $y = 4x - 4a + 1$ ג. $y = 4x - 3$ ד. 108.43° 47 4
- 48 $y = 4x - 4$ 49 83.66°

נקודות קיצון – פונקציות רציונאליות

נביא דוגמאות למציאת נקודות קיצון של פונקציות רציונאליות.

דוגמא א':

מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

פתרון:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \text{נקבל:}$$

כאשר שבר שווה ל-0 המונה שווה ל-0 (והמכנה שונה מ-0) לכן: $-2x^2+2 = 0$
והפתרונות הם: $x_1 = 1, x_2 = -1$

כדי לדעת איזו נקודה היא מינימום ואיזו היא מקסימום נגזור פעם שנייה:

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^2 - (-2x^2+2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

לפני שנמשיך לחשב את הנגזרת השנייה כדאי לזכור שהמטרה שלנו היא לא לגזור את הפונקציה פעם שנייה אלא רק לדעת את סימן הנגזרת השנייה לפתרונות x_1 ו- x_2 . המכפלה שבביטוי הימני במונה תתאפס גם ע"י x_1 וגם ע"י x_2 (הרי אלה פתרונות המשוואה $-2x^2+2 = 0$) ולכן מספיק לבדוק את הסימן של המכפלה שבביטוי השמאלי שבמונה כי במקרה זה המכנה $(x^2+1)^4$ הוא חיובי. גם הביטוי $(x^2+1)^2$ הוא חיובי ולכן סימן הנגזרת השנייה נקבע רק לפי הביטוי $-4x$ שהוא למעשה נגזרת המונה של הנגזרת הראשונה. עבור $x_1 = 1$ נקבל $-4 \cdot 1 = -4 < 0$, כלומר $f''(1) < 0$ ולכן ב- $x = 1$ יש מקסימום. באופן דומה, עבור $x_2 = -1$ נקבל $-4 \cdot (-1) = 4 > 0$, כלומר $f''(-1) > 0$ ולכן ב- $x = -1$ יש מינימום. לבסוף נחשב את ערכי y המתאימים ל-1 ו-1- ונקבל: $(1, 1)$ היא נקודת מקסימום ו- $(-1, -1)$ היא נקודת מינימום.

הערה:

בהתאם לדוגמא האחרונה נוכל לקבל את המסקנה הבאה:

אם הנגזרת הראשונה של פונקציה היא שבר בעל מכנה חיובי לכל x (פרט אולי לנקודות בודדות שבהן המכנה מתאפס) אז סימן הנגזרת השנייה של נקודת קיצון הוא כסימן נגזרת המונה של הנגזרת הראשונה.

דוגמא ב':

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad \text{מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה}$$

פתרון:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \quad \text{נגזור ונשווה לאפס:}$$

פתרונות המשוואה $x^2+2x = 0$ הם $x_1 = 0$ ו- $x_2 = -2$. כדי לקבוע את סימן הנגזרת השנייה עבור הפתרונות שהתקבלו מספיק (לפי ההערה שלפני הדוגמא) לגזור את המונה x^2+2x , הנגזרת היא $2x+2$. הצבה של $x = 0$ נותנת 2, שזהו מספר חיובי, כלומר מינימום והצבה של $x = -2$ נותנת -2, שזהו מספר שלילי, כלומר מקסימום. לאחר חישוב ערכי y המתאימים נקבל: $(0, 0)$ נקודת מינימום ו- $(-2, -4)$ נקודת מקסימום.

הערה:

בדוגמא האחרונה ערך הפונקציה בנקודת המינימום הוא 0 והוא יותר גדול מערך הפונקציה בנקודת המקסימום שהוא -4. הסיבה היא, שלהבדיל מהפונקציות הקודמות פונקציה זו איננה רציפה. היא איננה מוגדרת עבור $x = -1$ ולכן הגרף שלה בנוי משני חלקים נפרדים שאין קשר ביניהם ע"י קו רציף. (אחד עבור $x > -1$ והשני עבור $x < -1$).

דוגמא ג':

הראה שלפונקציה $f(x) = \frac{x}{x+2}$ אין נקודות קיצון.

פתרון:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} = 0$$

נגזור ונשווה לאפס:

למשוואה שהתקבלה אין פתרון כי ברור ש- $2 \neq 0$ ולכן לפונקציה הנ"ל אין נקודות קיצון.

תרגילים

(נקודות קיצון – פונקציות רציונאליות)

מציאת נקודות קיצון – פונקציות רציונאליות

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הרציונאליות הבאות:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \quad (3) \qquad y = \frac{x^2+2}{x^2+1} \quad (2) \qquad y = \frac{3}{x^2-6x} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{4}{3-x} \quad (6) \qquad y = \frac{x+2}{x^2+2x+4} \quad (5) \qquad y = \frac{x}{x+1} \quad (4)$$

$$y = \frac{x^2+5x+6}{x^2-4} \quad (9) \qquad y = \frac{1-2x}{x^2+2} \quad (8) \qquad y = \frac{x^2-6x+13}{x-3} \quad (7)$$

$$y = \frac{x^2-6x}{x^2-6x+9} \quad (12) \qquad y = \frac{x^2-3x}{(x-2)^2} \quad (11) \qquad y = \frac{2x}{x^2-2x+1} \quad (10)$$

$$y = \frac{x}{x^3+2} \quad (15) \qquad y = \frac{(x-\frac{2}{3})^2}{x^2-2} \quad (14) \qquad y = \frac{2x^2-1}{x^2+2x-2} \quad (13)$$

$$y = -\frac{x^4+16}{x^2} \quad (18) \qquad y = \frac{x^3}{x^2-1} \quad (17) \qquad y = \frac{x^3}{x-2} \quad (16)$$

$$y = \frac{(x-3)^2}{(x-1)^4} \quad (21) \qquad y = \frac{(x-2)^2}{(x-1)^3} \quad (20) \qquad y = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2} \quad (19)$$

תשובות (נקודות קיצון – פונקציות רציונאליות):

- (1) $(3, -\frac{1}{3})$ מקסימום. (2) $(0, 2)$ מקסימום. (3) $(-2, -2)$ מקסימום, $(2, 2)$ מינימום.
- (4) אין. (5) $(0, \frac{1}{2})$ מקסימום, $(-4, -\frac{1}{6})$ מינימום. (6) $(-3, \frac{1}{3})$ מקסימום, $(1, 3)$ מינימום.
- (7) $(1, -4)$ מקסימום, $(5, 4)$ מינימום. (9) אין. (10) $(-1, -\frac{1}{2})$ מינימום.
- (11) $(6, \frac{9}{8})$ מקסימום. (12) אין. (13) $(1, 1)$ מינימום, $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ מקסימום. (14) $(\frac{2}{3}, 0)$ מקסימום, $(3, \frac{7}{9})$ מינימום. (16) $(3, 27)$ מינימום, $(0, 0)$ פיתול. (17) $(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ מינימום, $(-\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{3})$ מקסימום, $(0, 0)$ פיתול. (18) $(2, -8)$ מקסימום, $(-2, -8)$ מינימום.
- (19) $(\sqrt{12}, -\frac{1}{32})$ מינימום, $(0, \frac{1}{4})$ מקסימום, $(-\sqrt{12}, -\frac{1}{32})$ מינימום.
- (20) $(2, 0)$ מינימום, $(4, \frac{4}{27})$ מקסימום. (21) $(3, 0)$ מינימום, $(5, \frac{1}{64})$ מקסימום.

נקודות קיצון עם פרמטרים – פונקציות רציונאליות

סעיף זה כולל תרגילים עם נקודות קיצון ופרמטרים.

תרגילים

(נקודות קיצון עם פרמטרים – פונקציות רציונאליות)

מציאת פרמטרים – נקודות קיצון (פונקציות רציונאליות)

(1) לפונקציה $y = \frac{x^2 - x + a}{x^2 - 2x + 5}$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.

א. מצא את a .

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

(2) לפונקציה $y = \frac{x^2 + ax}{(x+3)^2}$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = 1$.

א. מצא את a וקבע את סוג הקיצון.

ב. האם לפונקציה יש נקודות קיצון נוספות? נמק.

(3) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא הפונקציה $f'(x) = ax^2 + \frac{2}{x^2}$. ידוע שלפונקציה $f'(x)$ יש ערך קיצון בנקודה שבה $x = 1$.

א. מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה $f'(x)$.

ב. הוכח: לפונקציה $f(x)$ וגם לפונקציה $f''(x)$ אין נקודות קיצון.

(4) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{-x^2 + a}{(x-1)^2}$ בנקודה שבה $x = 2$ הוא -4 .

א. מצא את a .

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

5) לפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{ax+b}$ יש נקודת קיצון בנקודה (4, 8).

א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 2$. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה (3, 9) שעל הגרף שלה.

6) לפונקציה $y = \frac{x^2+ax+b}{x-2}$ יש נקודת קיצון בנקודה (1, -2).

א. מצא את a ו- b ואת סוג הקיצון של הנקודה.

ב. מצא את נקודת הקיצון השנייה של הפונקציה.

7) לפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2+b}$ יש נקודות קיצון בנקודות $x = 1$ ו- $x = -5$.

א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

8) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{ax^2+b}{(x-1)^2}$ בנקודה $(-1, \frac{3}{4})$ הוא $\frac{5}{4}$.

א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה).

9) לפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה- y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.

מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

הבעה בעזרת פרמטרים – נקודות קיצון (פונקציות רציונאליות)

10) נתונה הפונקציה $y = \frac{x}{x^2+ax+9}$ ($a \neq \pm 6$).

א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון והראה שהם לא תלויים ב- a .

ב. הבע באמצעות a את שיעורי ה- y של נקודות הקיצון וקבע את סוגן.

הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות וקבע את סוגן במקרים הבאים:

א) $a > 0$ ב) $a < 0$

11) $y = \frac{1}{x^2-2ax}$ 12) $y = x + \frac{4a^2}{x}$ 13) $y = \frac{x}{x^2+9a^2}$

14) נתונה הפונקציה: $y = \frac{(x-a)^2}{x+1}$, $a > 0$.

הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

$$(15) \text{ נתונה הפונקציה } y = \frac{x}{x^2+ax+a^2}, a > 0.$$

הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

$$(16) \text{ נתונה הפונקציה } y = \frac{a^2-x^2}{(x+1)^2}, a > 1.$$

הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה } y = \frac{(x-a)^2}{x^2+5}, a \neq 0.$$

א. הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ב. דרך שתי נקודות הקיצון הנ"ל מעבירים ישרים המאונכים לצירים. נתון שהמרחב שמתקבל ע"י ארבעת הישרים הנ"ל הוא ריבוע. מצא את a .

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה } y = \frac{x-a}{x^2+3a^2}, a > 0.$$

א. הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ב. נתון ששיפוע הישר שעובר דרך שתי נקודות הקיצון הנ"ל הוא $\frac{1}{6}$. מצא את a .

$$(19) \text{ נתונה הפונקציה } y = \frac{(x-a)^2}{x^2+a}, a > 0.$$

א. הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ב. מצא לאיזה ערך של a עבור $a < 0$ אין לפונקציה נקודות קיצון.

פרמטרים עם אי שוויונות – נקודות קיצון (פונקציות רציונאליות)

$$(20) \text{ הראה שאם } a > 0 \text{ אז לפונקציה } y = \frac{x^2}{x^2+a} \text{ יש נקודת מינימום בנקודה } (0, 0)$$

ואם $a < 0$ אז יש לה נקודת מקסימום בנקודה $(0, 0)$.

$$(21) \text{ א. הראה שאם } a \neq 0 \text{ אז לפונקציה } y = \frac{x^2}{x+a} \text{ יש שתי נקודות קיצון שאחת מהן היא בראשית הצירים.}$$

ב. הראה שאם $a > 0$ אז נקודת הקיצון בראשית הצירים היא נקודת מינימום ואם $a < 0$ אז היא נקודת מקסימום.

$$(22) \text{ הראה שאם } a > 0 \text{ אז לפונקציה } y = \frac{x}{x^2+a} \text{ יש שתי נקודות קיצון שאחת מהן}$$

היא נקודת מינימום והשנייה היא נקודת מקסימום.

$$(23) \text{ נתונה הפונקציה: } y = \frac{x^2+ax+1}{x^2+1}.$$

הראה שלכל $a > 0$ יש לפונקציה נקודת מקסימום ב- $x = 1$ ונקודת מינימום ב- $x = -1$.

$$(24) \text{ נתונה הפונקציה } y = \frac{x^2}{x^2+bx+2}$$

- א. מצא לאילו ערכי b יש לפונקציה שתי נקודות קיצון. היעזר במידת הצורך ב- b והבע את שיעורי ה- x של שתי הנקודות וקבע את סוגן.
 ב. מצא לאיזה ערך של b יש לפונקציה נקודת קיצון אחת בלבד. מצא את הנקודה וקבע את סוגה.

$$(25) \text{ לפונקציה } y = \frac{x^2+a}{x+b} \text{ יש נקודת קיצון בנקודה שבה } x = 4.$$

- א. חשב את שיעור ה- y של נקודת הקיצון.
 ב. מצא לאילו ערכי b הנקודה הנ"ל היא נקודת מינימום.

הערה: בתרגיל 26 צריך להיעזר בחקירה פשוטה של משוואה ריבועית.

$$(26) \text{ א. מצא לאילו ערכי } a \text{ יש לפונקציה } y = \frac{x+a}{x^2-4} \text{ שתי נקודות קיצון.}$$

- ב. האם ישנם ערכי a שעבורם יש לפונקציה נקודת קיצון אחת בלבד? נמק.

$$(27) \text{ נתונה הפונקציה } y = \frac{ax^2+bx-2}{(x+1)^2} \text{ ידוע שלפונקציה יש נקודת קיצון אחת בלבד}$$

ששיעור ה- x שלה לא תלוי ב- b .

- א. מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון ואת a .
 ב. מצא לאילו ערכי b נקודת הקיצון הנ"ל היא נקודת מקסימום.

תשובות (נקודות קיצון עם פרמטרים – פונקציות רציונאליות):

- (1) א. 4. ב. $(-1, \frac{3}{4})$ מינימום, $(3, \frac{5}{4})$ מקסימום. (2) א. -3, מינימום. ב. לא.
 (3) א. $a = 2$, $(1, 4)$ מינימום, $(-1, 4)$ מינימום. (4) א. 4. ב. $(4, -\frac{4}{3})$ מינימום.
 (5) א. $a = 1$, $b = -2$. ב. $(0, 0)$ מקסימום, $(4, 8)$ מינימום. ג. $y = 9x - 18$.
 (7) א. $a = 2$, $b = 5$. ב. $(1, \frac{1}{2})$ מקסימום, $(-5, -\frac{1}{10})$ מינימום. (8) א. $a = -1$, $b = 4$.
 ב. $(4, -\frac{4}{3})$ מינימום. (9) א. $a = -1$, $(-1, -\frac{1}{2})$ מינימום, $(3, \frac{1}{6})$ מקסימום.
 (10) א. ± 3 . ב. $(3, \frac{1}{a+6})$ מקסימום, $(-3, \frac{1}{a-6})$ מינימום. (11) א. $(a, -\frac{1}{a^2})$ מקסימום.
 ב. $(a, -\frac{1}{a^2})$ מקסימום. (12) א. $(2a, 4a)$ מינימום, $(-2a, -4a)$ מקסימום. ב. $(2a, 4a)$ מקסימום, $(-2a, -4a)$ מינימום. (13) א. $(3a, \frac{1}{6a})$ מקסימום, $(-3a, -\frac{1}{6a})$ מינימום.
 ב. $(3a, \frac{1}{6a})$ מינימום, $(-3a, -\frac{1}{6a})$ מקסימום. (14) $(a, 0)$ מינימום, $(-a-2, \frac{(2a+2)^2}{-a-1})$ מקסימום.
 (15) $(a, \frac{1}{3a})$ מקסימום, $(-a, -\frac{1}{a})$ מינימום. (16) $(-a^2, \frac{a^2}{1-a^2})$ מינימום.
 (17) א. $(a, 0)$ מינימום, $(-\frac{5}{a}, \frac{a^2+5}{5})$ מקסימום. ב. 5 או -5. (18) א. $(-a, -\frac{1}{2a})$

- מינימום, $(3a, \frac{1}{6a})$ מקסימום. ב. 1. 19 א. $(-1, a+1)$ מקסימום, $(a, 0)$ מינימום.
 ב. -1. 24 א. $x = 0$ מינימום, $x = -\frac{4}{b}$ מקסימום. ב. $b = 0$; $(0, 0)$ מינימום.
 25 א. 8. ב. $b > -4$. 26 א. $a > 2$ או $a < -2$. ב. לא. 27 א. $x = 1$, $a = -2$.
 ב. $b > -4$.

עלייה וירידה – פונקציות רציונאליות

נביא דוגמא למציאת תחומי עלייה וירידה של פונקציה רציונאלית. להבדיל מהמקרה של פולינומים, שהם מוגדרים לכל x , כאן צריך לשים לב לתחום ההגדרה.

דוגמא:

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 2x - 3} \quad \text{מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה}$$

פתרון:

נגזור את הפונקציה:

$$y' = \frac{2x(x^2 + 2x - 3) - x^2(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{2x^3 + 4x^2 - 6x - 2x^3 - 2x^2}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 6x}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

היות והמכנה $(x^2 + 2x - 3)^2$ הוא חיובי לכל ערכי x שעבורם הפונקציה מוגדרת, נותר לבדוק מתי המונה חיובי, אז הנגזרת הראשונה חיובית והפונקציה עולה. אי השוויון $2x^2 - 6x > 0$ הוא אי שוויון ריבועי שהפתרון שלו הוא $x > 3$ או $x < 0$. עכשיו נשים לב לתחום ההגדרה של הפונקציה. הפונקציה מוגדרת עבור $x \neq -3$, $x \neq 1$.

נוכל לסכם:

הפונקציה עולה בתחום: $x > 3$ או $-3 < x < 0$ או $x < -3$.
 הפונקציה יורדת בתחום: $1 < x < 3$ או $0 < x < 1$.

הערה: ניתן למצוא את תחומי העלייה והירידה גם בעזרת נקודות הקיצון.

תרגילים

(עלייה וירידה – פונקציות רציונאליות)

עלייה וירידה בנקודה – פונקציות רציונאליות

מצא לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא עולה או יורדת בנקודות הרשומות לידה: (בדוק את הנקודות מימין לשמאל)

$$(1) \quad y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}, \quad x = -1, 1, 0 \quad (2) \quad y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x}, \quad x = -\frac{1}{2}, 1, 0$$

תחומי עלייה וירידה – פונקציות רציונאליות

מצא את תחומי העלייה והירידה של כל פונקציה: (שים לב לתחום ההגדרה)

$$y = \frac{-x}{x^2+1} \quad (5) \quad y = \frac{x^2}{x^2+1} \quad (4) \quad y = \frac{3}{x^2+2} \quad (3)$$

$$y = \frac{x}{x-1} \quad (8) \quad y = \frac{x^2-1}{x} \quad (7) \quad y = \frac{x+2}{x^2+5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{4x^3-9x^2+6x} \quad (11) \quad y = \frac{x^2-3}{x-2} \quad (10) \quad y = \frac{x^2-x-1}{x+1} \quad (9)$$

$$y = \frac{x-5}{x^2-5x+4} \quad (14) \quad y = \frac{x^2}{x^2-x-2} \quad (13) \quad y = \frac{x^2-6x}{x^2-6x+8} \quad (12)$$

$$y = \frac{x^2-x}{x^2-1} \quad (17) \quad y = \frac{x^2-5x}{(x-5)^2} \quad (16) \quad y = \frac{x}{x^2-4x+4} \quad (15)$$

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_2}$$

- א. הראה שבתחום $0 < x < 2$ הפונקציה $f(x)$ עולה.
 - ב. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 - ג. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.
 - ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$.
- (1) מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה.
 - (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
 - (3) נתונה נקודה על גרף הפונקציה $g(x)$ ששיפוע המשיק בה לגרף הפונקציה $g(x)$ הוא -2 . מצא את שיעור ה- x של הנקודה.

עלייה וירידה עם פרמטרים – פונקציות רציונאליות

$$(19) \text{ נתונה הפונקציה } y = \frac{ax+5}{x^2-2x+2} \text{ בנקודה שבה } x = 0 \text{ יש לפונקציה נקודת קיצון.}$$

- א. מצא את a .
- ב. הצב בפונקציה את ה- a שמצאת בסעיף א' ומצא את:
 - (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - (2) תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$(20) \text{ לפונקציה } y = \frac{ax-b}{x^2-6x+5} \text{ יש נקודת קיצון בנקודה שבה } x = 2$$

- א. הראה שמתקיים $a = 2b$.
- ב. נתון $b > 0$. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הבע באמצעות a ($a > 0$) את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות הבאות:

$$(22) \quad y = \frac{1}{x^2-4ax} \quad (21) \quad y = x + \frac{9a^2}{x}$$

פרמטרים עם אי שוויונות – עלייה וירידה (פונקציות רציונאליות)

(23) נתון שהפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2+10}$ יורדת בנקודה שבה $x = 2$ והנגזרת לא מתאפסת בנקודה זו.

א. מצא באיזה תחום נמצא a .

ב. האם ייתכן שגרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בחלקו החיובי? נמק.

ג. האם ייתכן שלפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $x = 1$? נמק.

(24) נתון שהפונקציה $y = 2x^2 + \frac{a^2}{x} + 3ax$ עולה בנקודה $x = 1$ והנגזרת שלה לא מתאפסת בנקודה זו.

א. מצא באיזה תחום נמצא a .

ב. האם ייתכן ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = -2$ הוא -3 ? נמק.

(25) מצא לאילו ערכי a הפונקציה $y = \frac{x-a}{x-3}$ ($a \neq 3$):

א. עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = a$ מקביל לישר שמשיק לגרף

הפונקציה בנקודה שבה $x = 4$. מצא את a אם נתון שהפונקציה עולה לכל x

בתחום הגדרתה.

הערה: בתרגיל 26 צריך להיעזר בחקירה פשוטה של משוואה ריבועית.

(26) נתונה הפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2-1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא לאילו ערכי a הפונקציה יורדת בכל נקודה x בתחום ההגדרה שלה.

תשובות (עלייה וירידה – פונקציות רציונאליות):

(1) יורדת, עולה, לא מוגדרת. **(2)** לא מוגדרת, לא עולה ולא יורדת (מינימום), לא עולה

ולא יורדת (מקסימום). **(3)** עולה: $x < 0$, יורדת: $x > 0$. **(4)** עולה: $x > 0$, יורדת:

$x < 0$. **(5)** עולה: $x < -1$ או $x > 1$, יורדת: $-1 < x < 1$. **(7)** עולה: $x < 0$ או $x > 0$.

(8) יורדת: $x < 1$ או $x > 1$. **(9)** עולה: $x < -2$ או $x > 0$, יורדת: $-2 < x < -1$ או

$-1 < x < 0$. **(10)** עולה: $x < 1$ או $x > 3$, יורדת: $1 < x < 2$ או $2 < x < 3$. **(11)** עולה:

$\frac{1}{2} < x < 1$, יורדת: $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{2}$ או $x < 0$. **(12)** עולה: $3 < x < 4$ או $x > 4$,

יורדת: $2 < x < 3$ או $x < 2$. **(13)** עולה: $-1 < x < 0$ או $-4 < x < -1$, יורדת: $x < -4$

או $0 < x < 2$ או $x > 2$. **(14)** עולה: $3 < x < 4$ או $4 < x < 7$, יורדת: $x > 7$ או

$1 < x < 3$ או $x < 1$. **(16)** יורדת: $x < 5$ או $x > 5$. **(17)** עולה: $x < -1$ או $-1 < x < 1$

או $x > 1$. **(18)** ב. $(1, 0)$. ג. חיובית: $x > 1$, שלילית: $x < 1$, $x \neq 0$. ד. (1) $x = 1$

- מינימום. (2) עולה: $x > 1$, יורדת: $0 < x < 1$. (3) $x = \frac{1}{2}$. (19) א. -5. ב. (1) כל x .
 (2) עולה: $x < 0$ או $x > 2$, יורדת: $0 < x < 2$. (20) ב. עולה: $x < -1$ או $2 < x < 5$.
 או $x > 5$, יורדת: $1 < x < 2$ או $-1 < x < 1$. (21) עולה: $x < -3a$ או $x > 3a$, יורדת:
 $-3a < x < 0$ או $0 < x < 2a$, יורדת: $2a < x < 4a$. (22) עולה: $x < 0$ או $0 < x < 2a$, יורדת:
 או $x > 4a$. (23) א. $a > \frac{1}{2}$. ב. לא, כי אז $a < 0$ והוא לא בתחום של סעיף א'. ג. כן,
 כי אז $a = 4\frac{1}{2}$ והוא בתחום של סעיף א'. (24) א. $-1 < a < 4$. ב. כן, עבור $a = 2$.
 (25) א. $a > 3$. ב. $a < 3$. ג. 4. (26) א. $x \neq \pm 1$. ב. $-1 \leq a \leq 1$.

אסימפטוטות אנכיות – פונקציות רציונאליות

התנהגות פונקציה בסביבה של נקודת אי הגדרה

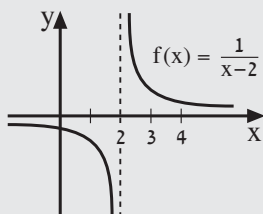
נדון עכשיו בהתנהגות של פונקציה בקרבת הנקודה או הנקודות שבהן היא לא מוגדרת.

דוגמא א':

שרטט את גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x-2}$ בסביבת הנקודה $x = 2$.

פתרון:

הפונקציה עצמה איננה מוגדרת בנקודה $x = 2$ אבל ניתן לשרטט את הגרף שלה בקרבת הנקודה ע"י חישוב ערכים קרובים ל- $x = 2$.
 ניעזר בטבלה:



x	1	1.5	1.9	1.99	2	2.01	2.1	2.5	3
$f(x)$	-1	-2	-10	-100	לא מוגדר	100	10	2	1

כפי שרואים מהציור (וגם מהטבלה) אז כאשר x שואף ל-2 משמאל, כלומר דרך מספרים הקטנים מ-2, ערך הפונקציה הולך וקטן ושואף ל- $-\infty$. ניתן להסיק זאת גם ע"י התבוננות בפונקציה עצמה $f(x) = \frac{1}{x-2}$. נסביר זאת: המונה שווה ל-1, שזהו מספר קבוע וחיובי, המכנה במקרה זה הוא מספר שלילי ($x < 2$) השואף ל-0 לכן המנה $\frac{1}{x-2}$ שלילית והיא הולכת וקטנה ושואפת ל- $-\infty$.

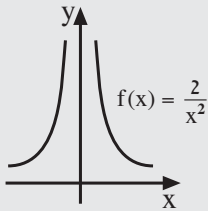
באופן דומה, אם x שואף ל-2 מימין, כלומר דרך מספרים הגדולים מ-2, אז ערך הפונקציה הולך וגדל ושואף ל- $+\infty$. ההסבר: המונה בפונקציה $f(x) = \frac{1}{x-2}$ הוא כמו קודם קבוע וחיובי, אבל המכנה במקרה זה הוא מספר חיובי ($x > 2$) השואף ל-0 לכן המנה $\frac{1}{x-2}$ חיובית ושואפת ל- $+\infty$.

דוגמא ב':

שרטט את גרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2}$ בקרבת הנקודה $x = 0$.
(ראה גם עמ' 20).

פתרון:

נבנה טבלה (מימין) ונשרטט את הגרף (משמאל):



x	-1	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5	1
f(x)	2	8	200	לא מוגדר	200	8	2

במקרה זה המכנה בפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2}$ הוא x^2 ולכן הוא תמיד חיובי גם כאשר x שואף משמאל ל-0 וגם כאשר x שואף מימין ל-0. המונה הוא 2 וגם הוא תמיד חיובי, מכאן שהמנה $\frac{2}{x^2}$ היא תמיד חיובית. לכן, ערך הפונקציה שואף ל- $+\infty$ גם כאשר x שואף ל-0 משמאל וגם כאשר x שואף ל-0 מימין.

אסימפטוטה המאונכת לציר ה-x

עפ"י הדוגמאות שראינו נוכל לסכם לגבי הפונקציות שבהן נעסוק: (ראה גם דוגמא ד' בעמוד 68)

אם בנקודה $x = x_1$ המכנה של פונקציית מנה מתאפס והמונה לא מתאפס אז כאשר x שואף ל- x_1 משמאל או מימין ערכי הפונקציה שואפים ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$ (לאו דווקא בסדר הזה).

הישר $x = x_1$ הוא ישר המאונך לציר ה-x. נביא את ההגדרה הבאה:

אסימפטוטה אנכית – ישר מהצורה $x = x_1$ המאונך לציר ה-x נקרא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $f(x)$ אם כאשר x שואף ל- x_1 משמאל או מימין ערכי הפונקציה שואפים ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$ (לאו דווקא בסדר הזה).

דוגמאות – עפ"י דוגמא א' הישר $x = 2$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x-2}$. עפ"י דוגמא ב' הישר $x = 0$ (ציר ה-y) הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2}$.

הערות:

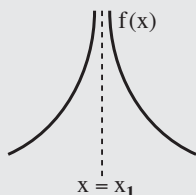
(א) כדאי לזכור שאסימפטוטה אנכית היא אסימפטוטה שמקבילה לציר ה-y או מתלכדת איתו.

(ב) בספר זה נדון רק בפונקציות שאם הישר $x = x_1$ הוא אסימפטוטה אנכית שלהן אז הן לא מוגדרות בנקודה $x = x_1$.

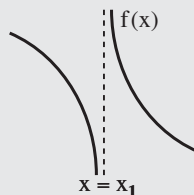
ג) כאשר רוצים לשרטט גרף של פונקציה שיש לה אסימפטוטה המאונכת לציר ה- x רצוי תחילה לשרטט את האסימפטוטה, כלומר את הישר $x = x_1$. למעשה גרף הפונקציה הולך ומתקרב לישר הנ"ל וצריך לזכור שגרף הפונקציה לא יכול לחתוך אותו כי הפונקציה לא מוגדרת בנקודה $x = x_1$ (ראה הערה ב'). לפונקציה יכולות להיות יותר מאסימפטוטה אחת אנכית.

ד) למעשה קיימות ארבע אפשרויות הקובעות את צורת הגרף של פונקציה רציונאלית בקרבת אסימפטוטה מאונכת מהצורה $x = x_1$. האפשרויות מפורטות להלן.

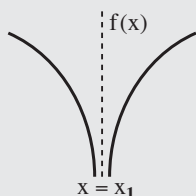
(2) כאשר x שואף ל- x_1 מימין וגם כאשר x שואף ל- x_1 משמאל הפונקציה שואפת ל- $-\infty$.



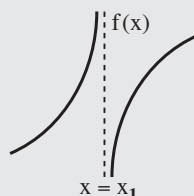
(1) כאשר x שואף ל- x_1 מימין הפונקציה שואפת ל- $-\infty$ וכאשר x שואף ל- x_1 משמאל הפונקציה שואפת ל- $+\infty$.



(4) כאשר x שואף ל- x_1 מימין וגם כאשר x שואף ל- x_1 משמאל הפונקציה שואפת ל- $+\infty$.



(3) כאשר x שואף ל- x_1 מימין הפונקציה שואפת ל- $+\infty$ וכאשר x שואף ל- x_1 משמאל הפונקציה שואפת ל- $-\infty$.



סיכום לגבי השלבים למציאת אסימפטוטות מאונכות ראה בעמ' הבא.

דוגמא ג':

מצא את האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקציה $y = \frac{x+1}{x^2-8x}$ פתרון:

אם נשווה את המכנה לאפס נקבל $x^2-8x = 0$ והפתרונות הם $x_1 = 0$, $x_2 = 8$. ברור שאף פתרון לא מאפס את המונה ולכן הישרים $x = 0$ (ציר ה- y) ו- $x = 8$ הם האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקציה.

פונקציה עם נקודת אי הגדרה שבה אין לפונקציה אסימפטוטה אנכית

נביא עכשיו דוגמא לפונקציה שאיננה מוגדרת בנקודה מסוימת אבל אין לה אסימפטוטה אנכית שעוברת בנקודה זו.

דוגמא ד':

מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $y = \frac{x+2}{x^2-4}$.
פתרון:

המכנה מתאפס כאשר $x = 2$ או $x = -2$.
אם נציב $x = 2$ במונה נראה שהוא לא מתאפס ולכן הישר $x = 2$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה. אם נציב $x = -2$ במונה נראה שגם הוא מתאפס.

לאחר צמצום נקבל: $y = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$. כלומר $x = -2$ לא מאפס

את הפונקציה לאחר הצמצום ולכן הוא לא אסימפטוטה אנכית.

לסיכום: לפונקציה אסימפטוטה אחת אנכית והיא הישר $x = 2$.

הערה:

ע"י הצבת ערכים ההולכים וקרבים ל-2 מימין ומשמאל בפונקציה $y = \frac{x+2}{x^2-4}$ אפשר לראות שערך הפונקציה מתקרב ל- $-\frac{1}{4}$. נשים לב שתוצאה זו מתקבלת אם מציבים $x = -2$ בפונקציה $y = \frac{1}{x-2}$. כלומר, הפונקציות $y = \frac{x+2}{x^2-4}$ ו- $y = \frac{1}{x-2}$ הן זהות פרט לנקודה שבה $x = -2$. בנקודה זו הפונקציה הראשונה לא מוגדרת והשנייה כן מוגדרת.

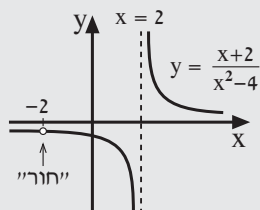
נוכל לסכם:

הפונקציה $y = \frac{x+2}{x^2-4}$ לא מוגדרת בנקודה

$x = -2$ אבל בכל זאת הישר $x = -2$ הוא

לא אסימפטוטה שלה. בתיאור הגרפי של הפונקציה

מסמנים עיגול ריק ("חור") בנקודה $(-2, -\frac{1}{4})$.



נביא את השלבים למציאת אסימפטוטות אנכיות.

השלבים למציאת אסימפטוטות המאונכות לציר ה-x של פונקציה רציונאלית:

- משווים את המכנה לאפס ופותרים את המשוואה המתקבלת.
- מציבים במונה את כל אחד מהפתרונות שהתקבלו בסעיף א'. כל פתרון שאיננו מאפס את המונה הוא אסימפטוטה מאונכת.
- אם פתרון מאפס גם את המונה (בנוסף למכנה) אז מצמצמים את פונקציית המנה עד שהיא לא ניתנת עוד לצמצום. אם לאחר הצמצום הפתרון עדיין מאפס את המכנה אז הוא אסימפטוטה, אם הוא איננו מאפס את המכנה אז הוא איננו אסימפטוטה.

תרגילים (אסימפטוטות אנכיות – פונקציות רציונאליות)

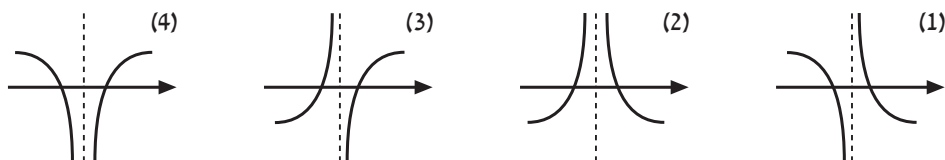
אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x – פונקציות רציונאליות

מצא את האסימפטוטות האנכיות של כל אחת מהפונקציות הבאות :

$y = \frac{x^2+3}{x^2+5x}$ (3)	$y = \frac{x-3}{x^2-16}$ (2)	$y = \frac{x}{x+8}$ (1)
$y = \frac{x+2}{x^2-x-12}$ (6)	$y = \frac{2x+5}{x^2-7x+6}$ (5)	$y = \frac{x^2}{x^2-6x+9}$ (4)
$y = \frac{x^2+1}{x^3-2x^2-15x}$ (9)	$y = \frac{x+3}{x^3+4x^2+5x}$ (8)	$y = \frac{x+1}{x^3-4x}$ (7)

מצא לגבי הפונקציות הבאות :

- (א) את תחום ההגדרה.
 (ב) את האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x (מהצורה $x = x_1$).
 (ג) קבע לגבי כל פונקציה כיצד היא מתנהגת בקרבת הישר $x = x_1$ ומצא איזה מהמקרים (1)–(4) שבציורים למטה מתקיים.



$y = \frac{x}{(x-1)^2}$ (12)	$y = \frac{x^2+2}{2-x}$ (11)	$y = \frac{x^2+1}{x}$ (10)
$y = \frac{2}{4-x^2}$ (15)	$y = \frac{x}{x+4}$ (14)	$y = \frac{x}{(x+3)^2}$ (13)
$y = \frac{3x}{9-x^2}$ (18)	$y = \frac{x-1}{x^2-4x}$ (17)	$y = \frac{1}{x^2-x}$ (16)
$y = \frac{x-1}{x^2-2x-3}$ (21)	$y = \frac{x^2}{x^2-4x+4}$ (20)	$y = \frac{-x}{x^2-5x+4}$ (19)

פונקציות עם נקודת אי הגדרה שבה (אולי) אין להן אסימפטוטה אנכית

- מצא לגבי הפונקציות הבאות את : (היעזר בפירוק לגורמים)
 (א) תחום ההגדרה.
 (ב) האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x (אם יש כאלה).
 (ג) שיעור ה- x של הנקודה שבה יש "חור" בגרף של הפונקציה. (המשך התרגילים בעמ' הבא)

$$\begin{array}{lll}
 y = \frac{x^2-1}{x+1} & (24) & y = \frac{x^2}{x^2+2x} & (23) & y = \frac{x^2-x}{x-1} & (22) \\
 y = \frac{x-4}{x^2-3x-4} & (27) & y = \frac{x+5}{x^2-25} & (26) & y = \frac{x^2-4}{x^2-2x} & (25) \\
 y = \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4} & (30) & y = \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9} & (29) & y = \frac{x^2+x}{x^2-8x-9} & (28) \\
 y = \frac{x^3-4x^2-5x}{x^3-5x^2-6x} & (33) & y = \frac{x^2+2x-3}{x^3-9x} & (32) & y = \frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4} & (31)
 \end{array}$$

מצא את שיעורי הנקודות שבהן יש "חור" בגרף של הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{lll}
 y = \frac{x^2-1}{x^4-5x^2+4} & (36) & y = \frac{4x^2-1}{4x^3-x} & (35) & y = \frac{x^2-x-6}{x^2-7x+12} & (34)
 \end{array}$$

תשובות (אסימפטוטות אנכיות – פונקציות רציונאליות):

- (1) $x = -8$ (2) $x = -4, x = 4$ (3) $x = -5, x = 0$ (4) $x = 3$ (5) $x = 1, x = 6$
 (7) $x = 0, x = 2, x = -2$ (8) $x = 0$ (9) $x = 0, x = 5, x = -3$ (10) $x \neq 0$
 ב. $x = 0$ ג. (1) (11) $x \neq 2$ ב. $x = 2$ ג. (3) (12) $x \neq 1$ ב. $x = 1$
 ג. (2) (13) $x \neq -3$ ב. $x = -3$ ג. (4) (14) $x \neq -4$ ב. $x = -4$ ג. (3)
 (15) $x \neq 2, x \neq -2$ ב. $x = 2, x = -2$ ג. (1), (3) (17) $x \neq 4, x \neq 0$
 ב. $x = 0, x = 4$ ג. (1), (1) (18) $x \neq 3, x \neq -3$ ב. $x = 3, x = -3$ ג. (3), (3)
 (19) $x \neq 1, x \neq 4$ ב. $x = 1, x = 4$ ג. (1), (3) (20) $x \neq 2$ ב. $x = 2$
 ג. (2) (21) $x \neq -1, x \neq 3$ ב. $x = -1, x = 3$ ג. (1), (1) (22) $x \neq 1$
 ב. אין. ג. $x = 1$ (23) $x \neq 0, x \neq -2$ ב. $x = -2, x = 0$ ג. (24) $x \neq -1$
 ב. אין. ג. $x = -1$ (25) $x \neq 0, x \neq 2$ ב. $x = 0, x = 2$ ג. (27) $x \neq -1$
 $x \neq 4, x = -1, x = 4$ ג. (28) $x \neq -1, x \neq 9$ ב. $x = 9, x = -1$ ג.
 (29) $x \neq 3, x = 3$ ב. אין. ג. (30) $x \neq 2, x = 2$ ב. אין. ג. (31) $x \neq 2$
 $x \neq -2, x = -2, x = 0$ ג. (32) $x \neq 0, x \neq 3, x \neq -3$ ב. $x = 0, x = 3$
 ג. $x = -3$ (33) $x \neq 0, x \neq -1, x \neq 6$ ב. $x = 6, x = -1$ ג. (34) $(-5, 3)$
 (35) $(\frac{1}{2}, 2), (-\frac{1}{2}, -2)$ (36) $(1, -\frac{1}{3}), (-1, -\frac{1}{3})$

אסימפטוטות אופקיות – פונקציות רציונאליות

כדי להבין את הנושא שבו נדון בסעיף זה נסתכל בפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ ונציב במקום x ערכים חיוביים ההולכים וגדלים וערכים שליליים ההולכים וקטנים.

נחשב בכל מקרה את ערכי הפונקציה המתקבלים:

x	-1	-2	-10	-100
f(x)	0.5	0.8	0.99	0.9999

x	1	2	10	100
f(x)	0.5	0.8	0.99	0.9999

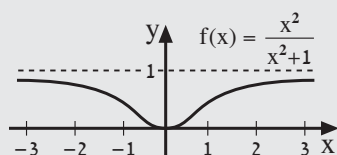
עפ"י התוצאות רואים שכאשר x הולך וגדל ושואף ל- ∞ או הולך וקטן ושואף ל- $-\infty$ ערך הפונקציה שואף ל-1. במילים אחרות: כאשר x שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$

המרחק בין גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ לישר

$y = 1$, המקביל לציר ה- x , שואף לאפס. הישר

$y = 1$ נקרא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה

$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. נביא את ההגדרה:



אסימפטוטה אופקית – ישר מהצורה $y = b$ המקביל לציר ה- x (או מתלכד איתו) נקרא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $f(x)$ אם כאשר x שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$ המרחק בין גרף הפונקציה $f(x)$ לישר $y = b$ שואף לאפס.

הערה:

כדי למצוא אסימפטוטה אופקית של פונקציה $f(x)$ צריך למעשה לחשב גבולות מהצורה

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{וכן} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

דוגמא א':

מצא את האסימפטוטה האופקית של כל אחת מהפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2-2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+3} \quad (1)$$

פתרונות:

(1) ברצוננו למצוא לאיזה ערך מספרי שואף הביטוי $\frac{2x}{x^2+3}$ כאשר x שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.

כדי לעשות זאת נחלק את המונה והמכנה של הפונקציה בביטוי שמכיל את החזקה הגבוהה ביותר של x שמופיעה בפונקציה. במקרה זה הביטוי הוא x^2 .

בצורה כזאת לא נשנה את הביטוי האלגברי שמתאר את הפונקציה.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+3} = \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}}$$

נקבל:

נשים לב שמתקיים: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$ (כי מחלקים מספר קבוע במספר שהולך וגדל ל- ∞ או הולך וקטן ל- $-\infty$). באופן דומה מתקיים $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x^2} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

לכן, אם נעבור לגבול נקבל:

לסיכום – האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$ היא הישר $y = 0$, כלומר ציר ה- x .

(2) בצורה דומה נקבל כאן ע"י חילוק בחזקה הגבוהה ביותר, שהיא x^2 :

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2-2} = \frac{\frac{3x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \frac{3}{1 - \frac{2}{x^2}}$$

וע"י מעבר לגבול נקבל: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{3}{1-0} = 3$

לסיכום – האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-2}$ היא הישר $y = 3$.

(3) כאן נקבל ע"י חילוק בחזקה הגבוהה ביותר, שהיא x^3 :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}$$

אם ניתן ל- x לשאוף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$ נקבל שערך הפונקציה במקרה זה שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$ ולכן אין אסימפטוטה אופקית.

לסיכום – לפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ אין אסימפטוטה אופקית.

הערה: באופן כללי מתקיים: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$ (n טבעי).

עפ"י שלוש הדוגמאות שהבאנו נוכל לנסח את הכללים למציאת אסימפטוטה אופקית.

הכללים למציאת אסימפטוטה אופקית של פונקציה רציונאלית:

(א) אם מעריך החזקה הגבוה ביותר במונה יותר קטן ממעריך החזקה הגבוה ביותר במכנה אז האסימפטוטה היא ציר ה- x . ($y = 0$).

(ב) אם מעריך החזקה הגבוה ביותר במונה שווה למעריך החזקה הגבוה ביותר במכנה אז האסימפטוטה היא הישר $y = \frac{a}{b}$, כאשר a הוא המקדם של ה- x בעל מעריך החזקה הגבוה ביותר במונה ו- b הוא המקדם של ה- x בעל מעריך החזקה הגבוה ביותר במכנה.

(ג) אם מעריך החזקה הגבוה ביותר במונה יותר גדול ממעריך החזקה הגבוה ביותר במכנה אז אין אסימפטוטה אופקית לפונקציה.

הערות:

(א) באופן כללי צריך לבדוק לחוד את הגבול $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ולחוד את הגבול $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. במקרים מסויימים ייתכן ותתקבלנה שתי אסימפטוטות אופקיות שונות מהגבולות הנ"ל. (ראה את הדוגמא שבעמ' 141).

(ב) אם לפונקציה אסימפטוטה המקבילה לציר ה- x אז משרטטים אותה לפני התיאור הגרפי של הפונקציה. בצורה כזאת ניתן לראות את צורת הגרף של הפונקציה עבור ערכי x חיוביים ההולכים וגדלים או עבור ערכי x שליליים ההולכים וקטנים. עוד נדגיש, שגרף הפונקציה יכול לחתוך את האסימפטוטה האופקית בנקודה (או בנקודות) שאינה "רחוקה" מראשית הצירים. (כזכור, בפונקציות שבהן נדון בספר זה, גרף הפונקציה איננו יכול לחתוך אסימפטוטה המאונכת לציר ה- x).

(ג) קיימות גם אסימפטוטות משופעות (כלומר שאינן מאונכות לצירים). משוואת הישר במקרה זה היא $y = mx + b$. במסגרת ספר זה לא נעסוק במציאת אסימפטוטות כאלה.

אסימפטוטות המאונכות לצירים

נביא דוגמא למציאת האסימפטוטות האנכיות והאסימפטוטה האופקית של פונקציה.

דוגמא ב':

מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $y = \frac{-3x^2+5}{x^2-2x-8}$. פתרון:

אסימפטוטות אנכיות – אם נשווה את המכנה לאפס נקבל $x^2 - 2x - 8 = 0$ והפתרונות הם $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. ברור שאף אחד מהפתרונות לא מאפס את המונה ולכן הישרים $x = 4$ ו- $x = -2$ הם האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקציה.

אסימפטוטה אופקית – החזקה הגבוהה ביותר במונה היא x^2 והמקדם הוא -3 . החזקה הגבוהה ביותר במכנה גם היא x^2 והמקדם הוא 1 . לכן האסימפטוטה האופקית היא $y = \frac{-3}{1}$. כלומר הישר $y = -3$.

הערה:

במושג "אסימפטוטות מקבילות לצירים" מתכוונים לפעמים גם לאסימפטוטות שמתלכדות עם הצירים למרות חוסר הדיוק. אם לפחות אחת מהאסימפטוטות מתלכדת עם אחד מהצירים אז עדיף לומר: **אסימפטוטות המאונכות לצירים**.

תרגילים (אסימפטוטות אופקיות – פונקציות רציונאליות)

אסימפטוטות אופקיות – פונקציות רציונאליות

מצא את האסימפטוטה האופקית של כל אחת מהפונקציות הבאות :

$y = \frac{x^2}{x^2+3}$ (3)	$y = \frac{1}{x^2+2}$ (2)	$y = \frac{x}{x^2+1}$ (1)
$y = \frac{4x}{x^2-1}$ (6)	$y = \frac{2x}{3-x}$ (5)	$y = \frac{3x}{x+2}$ (4)
$y = \frac{2x^2}{1-3x^2}$ (9)	$y = \frac{x^4}{x^2+1}$ (8)	$y = \frac{x^2}{2x+1}$ (7)
$y = \frac{2-3x^3}{x^3+x+1}$ (12)	$y = \frac{x^3-x}{(2x-1)^2}$ (11)	$y = \frac{3x}{5x-1}$ (10)
$y = \frac{x^3}{(2x+1)^3}$ (15)	$y = \frac{x^3}{(x-3)^4}$ (14)	$y = \frac{x^4+x^2+2}{x-2x^4}$ (13)

אסימפטוטות המאונכות לצירים – פונקציות רציונאליות

מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של כל אחת מהפונקציות הבאות :

$y = \frac{x^2}{x-4}$ (18)	$y = \frac{2x}{x-5}$ (17)	$y = \frac{4}{x+2}$ (16)
$y = \frac{x^3}{x^2+1}$ (21)	$y = \frac{-x^2}{(x+3)^2}$ (20)	$y = \frac{x}{(x-1)^2}$ (19)
$y = \frac{x^2}{3x^2+9x}$ (24)	$y = \frac{3x}{x^2-4}$ (23)	$y = \frac{x}{x^2+2}$ (22)
$y = \frac{2x^2}{x^2-10x+9}$ (27)	$y = \frac{4-x}{x^2-2x+2}$ (26)	$y = \frac{3-x^2}{x^2-x-2}$ (25)
$y = \frac{3x^2-4x+2}{2x^2-x-1}$ (30)	$y = \frac{x^2+6x-7}{x^2-6x+5}$ (29)	$y = \frac{x^2-x-12}{x^2-7x+12}$ (28)
$y = 1 + \frac{x^2-x-6}{x^2-6x-16}$ (33)	$y = 2 - \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$ (32)	$y = 3 + \frac{x-2}{x^2-4x+4}$ (31)

מצא את נקודת החיתוך של כל אחת מהפונקציות הבאות עם האסימפטוטה האופקית שלה :

$y = \frac{3x^2-5x+6}{x^2-4x-5}$ (35)	$y = \frac{-x^2+4}{(x-1)^2}$ (34)
$y = \frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$ (37)	$y = \frac{x^2-4}{x^3} + 4$ (36)

תשובות (אסימפטוטות אופקיות – פונקציות רציונאליות):

- (1) $y = 0$ (2) $y = 0$ (3) $y = 1$ (4) $y = 3$ (5) $y = -2$ (6) $y = 0$ (7) אין.
 (8) אין. (9) $y = -\frac{2}{3}$ (10) $y = \frac{3}{5}$ (11) אין. (13) $y = -\frac{1}{2}$ (14) $y = 0$ (15) $y = \frac{1}{8}$.
 (16) $x = -2$, $y = 0$ (17) $x = 5$, $y = 2$ (18) $x = 4$ (19) $x = 1$, $y = 0$ (20) $x = -3$,
 $y = -1$ (21) אין. (23) $x = 2$, $x = -2$, $y = 0$ (24) $x = -3$, $y = \frac{1}{3}$ (25) $x = 2$,
 $x = -1$, $y = -1$ (26) $y = 0$ (27) $x = 1$, $x = 9$, $y = 2$ (28) $x = 3$, $y = 1$.
 (30) $x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$, $y = 1\frac{1}{2}$ (31) $x = 2$, $y = 3$ (32) $x = 1$, $y = 1$ (33) $x = 8$,
 (34) $y = 2$, $(-\frac{1}{2}, 2)$ (35) $(-3, 3)$ (36) $(2, 4)$, $(-2, 4)$ (37) אין חיתוך.

אסימפטוטות עם פרמטרים – פונקציות רציונאליות

נביא דוגמא לפונקציה עם פרמטרים ועם אסימפטוטות.

דוגמא:

הישרים $x = 1$ ו- $y = 5$ הם אסימפטוטות של הפונקציה $y = a + \frac{4x^2}{bx^2 - x - 1}$.
 מצא את a ו- b ורשום את הפונקציה.

פתרון:

אם הישר $x = 1$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה אז כאשר מציבים $x = 1$ במכנה הוא שווה לאפס. כלומר $0 = 1^2 - 1 - 1 = b \cdot 1^2 - 1 - 1$ ולכן $b = 2$.
 הישר $y = 5$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה ולכן $5 = a + \frac{4}{b}$. כפי שראינו, $b = 2$ ולכן $5 = a + 2$, אז $a = 3$.

לסיכום: הפונקציה היא $y = 3 + \frac{4x^2}{2x^2 - x - 1}$.

תרגילים

(אסימפטוטות עם פרמטרים – פונקציות רציונאליות)

מציאת פרמטרים עם אסימפטוטות – פונקציות רציונאליות

- (1) הישר $x = 5$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $y = \frac{-x^2}{x^2 + ax + 25}$.
 א. מצא את a .
 ב. האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית נוספת? נמק.
 ג. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודת החיתוך של האסימפטוטה האופקית עם הפונקציה.

(2) הישר $y = 1.5$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $y = \frac{3x^2+2}{ax^2+10x}$.
א. מצא את a .

ב. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{Ax^2+x-2}{x^2-x+B}$. בנקודה שבה $x = 1$ שיפוע המשיק הוא $-\frac{3}{2}$.

הישר $x = 2$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שאר האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. מצא את נקודת החיתוך של האסימפטוטה האופקית עם הפונקציה.

(4) הישרים $x = 3$ ו- $x = 5$ הם אסימפטוטות אנכיות של הפונקציה $y = \frac{-x^2}{ax^2+bx+15}$.
א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

ג. הוכח שהפונקציה היא לא אי זוגית ולא זוגית.

(5) הישרים $x = 2$ ו- $y = 3$ הם אסימפטוטות של הפונקציה $y = \frac{ax^2}{bx^2+4x-12}$.
א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את האסימפטוטה האנכית השנייה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

(6) גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2+ax+4}$ חותך את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$.
א. מצא את a .

ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ג. נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x) + c$. האסימפטוטה האופקית של $g(x)$ היא $y = 4.5$. מצא את c .

(7) האסימפטוטה האופקית והאסימפטוטה האנכית של הפונקציה $y = \frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+a} + b$ נחתכות בנקודה $(-2, 4)$.

א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את שיעורי הנקודה שבה יש "חור" בגרף של הפונקציה.

(8) הישר $y = x$ חותך את הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2+3x+2}{x^2+4}$ בנקודה שבה הפונקציה

חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.

א. מצא את האסימפטוטה האופקית.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = 3f(x) - 7$. מצא את האסימפטוטה האופקית של $g(x)$.

- (9) הישרים $y = 7$ ו- $x = -2$ הם אסימפטוטות של הפונקציה $y = a + \frac{6x^2-1}{ax+bx^2}$.
 א. מצא את a ו- b .
 ב. האם יש לפונקציה אסימפטוטה נוספת המאונכת לציר ה- x ?

- (10) לפונקציה $y = \frac{x+b}{x^2-a}$ יש אסימפטוטה אנכית אחת בלבד שהיא הישר $x = 5$.
 א. מצא את a ו- b .
 ב. הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון והיא יורדת בכל תחום הגדרתה.

הבעה בעזרת פרמטרים – אסימפטוטות (פונקציות רציונאליות)

היעזר ב- a במידת הצורך ($a > 0$) ומצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציות הבאות:

$$(11) \quad y = \frac{x^2}{x^2-a^2} \quad (12) \quad y = \frac{ax^2+1}{2x^2-8} \quad (13) \quad y = \frac{x^2-1}{(ax-1)^2}$$

$$(14) \quad y = \frac{x^2+1}{x^2-ax} \quad (15) \quad y = \frac{x}{x^2-a} \quad (16) \quad y = \frac{1}{x^2-5ax+6a^2}$$

$$(17) \quad \text{נתונה הפונקציה } y = \frac{2x^2}{a^2x^2-3ax-4}, a \neq 0.$$

- א. הבע באמצעות a את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
 ב. הבע באמצעות a את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

תרגילים שונים – אסימפטוטות עם פרמטרים (פונקציות רציונאליות)

$$(18) \quad \text{נתונה הפונקציה } y = \frac{4x^4}{(a^2x^2-1)^2}, a \neq 0.$$

- א. הבע באמצעות a את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
 ב. האם בנקודה שבה $x = 0$ הפונקציה עולה, יורדת או שיש לה נקודת קיצון? נמק את תשובתך. (אין צורך לגזור את הפונקציה).
 ג. $g(x)$ היא הפונקציה שמקיימת: $g(x) = f(-x)$. היעזר בסעיף א' והבע באמצעות a את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

$$(19) \quad \text{נתונה הפונקציה } y = \frac{2x^2+a}{x+b}. \text{ הישר } x = -3 \text{ הוא אסימפטוטה לפונקציה והמשיק}$$

- לגרף הפונקציה בנקודה $x = -1$ יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 א. מצא את a ו- b .
 ב. האם יש לפונקציה אסימפטוטה המקבילה לציר ה- x ?

- (20) לפונקציה $y = \frac{6x+a}{bx-2x^2}$ יש נקודת קיצון ב- $x = -1$ והישר $x = 1$ הוא אסימפטוטה לפונקציה.
א. מצא את a ו- b .
ב. מצא את שאר האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

- (21) נתונה הפונקציה $y = \frac{-2x+16}{x^2+bx-a}$ בנקודה שבה $x = 2$ יש לפונקציה נקודת קיצון והישר $x = -1$ הוא אסימפטוטה לפונקציה.
א. מצא את a ו- b .
ב. מצא את שאר האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

- (22) א. הוכח: לכל ערך של a המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{ax^2-4}{x+2}$ בנקודה $x = -4$ יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
ב. לאיזה ערך של a הישר $x = -2$ הוא לא אסימפטוטה של הפונקציה.

- (23) נתונה הפונקציה $y = \frac{ax^2-6}{4x+bx^2+2}$ הפונקציה לא מוגדרת בנקודה שבה $x = -1$ והישר $y = 3$ הוא אסימפטוטה שלה.
א. מצא את a ו- b .
ב. האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית? נמק.
ג. הראה שהפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

- (24) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+a}{x-1}$, $a \neq 0$.
א. מצא לאיזה ערך של a הפונקציה מייצגת ישר ללא נקודה אחת. מהי משוואת הישר ומהי הנקודה?
ב. ידוע שהפונקציה $f(x)$ לא מייצגת את הישר הנ"ל.
(1) מצא את a אם שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 0$ שווה לשיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = a$.
(2) האם שני המשיקים הנ"ל מתלכדים למשיק אחד? נמק.

- (25) נתונה הפונקציה $y = \frac{x^3-1}{x^n-3x+a}$ n מספר טבעי. לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית והישר $x = 2$ הוא אסימפטוטה אנכית שלה.
א. מצא את a (הבחן בין שני מקרים).
ב. האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית נוספת? (בדוק את שני המקרים).

- (26) נתונה הפונקציה $y = \frac{ax^2-3x}{x^2-1}$.
היעזר ב- a במידת הצורך ומצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה. הבחן בין שלוש אפשרויות.

(27) נתונה הפונקציה $y = \frac{x-3}{x^2+a}$ מצא לאילו ערכי a :

- א. אין לפונקציה אסימפטוטות אנכיות.
 ב. יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית אחת. מצא אותה.
 ג. יש לפונקציה שתי אסימפטוטות אנכיות.
 ד. באחת מהאפשרויות שבסעיף ב' יש לפונקציה נקודת קיצון. מצא את הנקודה וקבע את סוג הקיצון.

(28) לפונקציה $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+bx+c}$ יש אסימפטוטה אנכית אחת בלבד והיא הישר $x = 3$. מצא את b ו- c . (מצא את כל האפשרויות).

תשובות (אסימפטוטות עם פרמטרים – פונקציות רציונאליות):

1. א. -10. ב. לא. ג. $y = -1$. ד. $(2.5, -1)$. 2. א. 2. ב. $x = 0, x = -5$.
 3. א. $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$. ב. $x = -1, y = 1$. ג. $(0, 1)$. 4. א. $a = 1, b = -8$.
 5. א. $y = -1$. ב. $x = 1, x = 4, y = 1$. ג. 3.5. 7. א. $a = -10, b = 3$.
 6. א. $(5, 3\frac{4}{7})$. 8. א. $y = 2$. ב. $y = -1$. 9. א. $a = 4$ ו- $b = 2$ או $a = 3$ ו- $b = 1\frac{1}{2}$.
 10. א. $x = 0$. 11. א. $a = 25, b = 5$. 12. א. $x = a, x = -a, y = 1$. 13. א. $x = -2, y = \frac{a}{2}$. 14. א. $x = 0, x = a, y = 1$. 15. א. $x = \sqrt{a}$.
 16. א. $x = -\sqrt{a}, y = 0$. 17. א. $x = \frac{4}{a}, x = -\frac{1}{a}, y = \frac{2}{a^2}$.
 18. א. $x = -\frac{8}{3a}$ מינימום. 19. א. $x = \frac{1}{a}, x = -\frac{1}{a}, y = \frac{4}{a^4}$.
 20. א. $a = 2, b = 2$. ב. $x = 0, y = 0$. 21. א. $a = 4, b = -3$. ב. $x = 4, y = 0$.
 22. א. $a = 1$. ב. $a = 6, b = 2$. כן, $x = -1$. 23. א. $a = 4$ או $a = 2$. ב. לא.
 24. א. $a = -1, y = x+1$.
 25. א. $a = 2$ ו- $x = -1$ או $a = 3$ ו- $y = 3$; אם $a \neq \pm 3$ או $x = 1, y = a$ ו- $x = -1$; אם $a = -3$ או $y = -3, x = 1$. 26. א. $a > 0$. ב. $a = 0$ ו- $x = 0$ או $a = -9$ ו- $x = -3$.
 27. א. $a < 0, a \neq -9$. ד. $(6, \frac{1}{12})$ מקסימום. 28. א. $b = -4, c = 3$ או $b = -5, c = 6$ או $b = -6, c = 9$.

חקירת פונקציה – פונקציות רציונאליות

בסעיף זה נדון בחקירת פונקציה רציונאלית ובשרטוט הגרף שלה.

דוגמא א':

חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$ עפ"י הסעיפים הבאים ומצא:

- תחום הגדרה.
- נקודות קיצון.
- תחומי עלייה וירידה.
- נקודות חיתוך עם הצירים.
- אסימפטוטות המאונכות לצירים.
- שרטט את גרף הפונקציה.
- מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$? נמק.
- בהסתמך על הגרף של $f(x)$ שרטט בצורה כללית את הגרף של $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

פתרון:

א. **תחום הגדרה** – המכנה שווה לאפס כאשר $x = 0$ ולכן תחום ההגדרה הוא $x \neq 0$.

ב. **נקודות קיצון** – נגזור את הפונקציה ונשווה ל-0, נקבל:

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot x^2 - (1-x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^2 - 2x}{x^4} = 0$$

המשוואה המתקבלת היא $x^2 - 2x = 0$ והפתרונות הם: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. הפונקציה אינה מוגדרת בנקודה $x = 0$ ולכן נותר לבדוק רק את הנקודה $x = 2$. כדי לקבוע את סוג נקודת הקיצון מספיק לגזור את המונה של הנגזרת הראשונה. הנגזרת של $x^2 - 2x$ היא $2x - 2$. אם נציב $x = 2$ בנגזרת זו נקבל $2 \cdot 2 - 2 = 2 > 0$ ולכן ב- $x = 2$ יש מינימום. חישוב ה- y נותן $y = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$. כלומר, נקודת הקיצון של הפונקציה היא הנקודה $(2, -\frac{1}{4})$ והיא נקודת מינימום.

ג. **תחומי עלייה וירידה** – המכנה של הנגזרת הראשונה הוא חיובי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה ולכן נשאר לבדוק מתי המונה של הנגזרת הראשונה הוא חיובי ומתי הוא שלילי. הפתרון של אי השוויון הריבועי $x^2 - 2x > 0$ הוא $x < 0$ או $x > 2$ והפתרון של אי השוויון הריבועי $x^2 - 2x < 0$ הוא $0 < x < 2$. לכן הפונקציה עולה בתחום $x < 0$ או $x > 2$ ויורדת בתחום $0 < x < 2$.

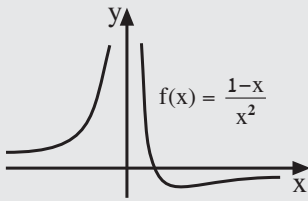
ד. **נקודות חיתוך עם הצירים** – כדי למצוא את נקודת החיתוך עם ציר ה- x נשווה את הפונקציה לאפס. נקבל $\frac{1-x}{x^2} = 0$ ולכן $x = 1$. כלומר, הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה $(1, 0)$. הפונקציה לא חותכת את ציר ה- y כי היא לא מוגדרת עבור $x = 0$.

ה. **אסימפטוטות אנכיות** – כאשר $x = 0$ המכנה שווה לאפס והמונה לא שווה לאפס לכן הישר $x = 0$ (ציר ה- y) הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה. התנהגות הפונקציה בסביבת ה-0 היא בדומה למוסבר בדוגמא ב' שבעמ' 38. ניתן להגיע למסקנה זו גם עפ"י תחומי העלייה והירידה.

אסימפטוטה אופקית – החזקה הגבוהה ביותר במונה היא x והחזקה הגבוהה ביותר במכנה היא x^2 לכן האסימפטוטה היא $y = 0$, כלומר ציר ה- x .

לסיכום – האסימפטוטות המאונכות לצירים הן הצירים עצמם: $x = 0$, $y = 0$.

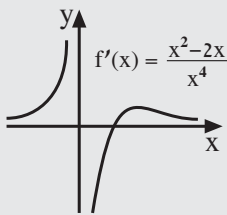
ו. **התיאור הגרפי** – את התוצאות שקיבלנו ניתן לסכם בטבלה. התיאור הגרפי מופיע משמאל.



x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
f(x)	$\frac{3}{4}$	2	לא מוגדרת	2	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{9}$
f'(x)	+	+		-	-	0	+
עלייה ירידה						מינימום	

ז. ע"י התבוננות בנגזרת של הפונקציה $f(x)$ שבפתרון של סעיף ב' קל לראות שהאסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$ הן: $x=0$, $y=0$.

ח. עפ"י תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ שבפתרון של סעיף ג' נקבל שהפונקציה $f'(x)$ חיובית בתחום $x < 0$ או $x > 2$ ושלילית בתחום $0 < x < 2$. בנקודה $x=2$ יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון ולכן בנקודה $x=2$ הפונקציה $f'(x)$ חותכת את ציר ה-x. לפי הנתון לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד ולכן לפונקציה $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.



בהסתמך על נקודת החיתוך של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה-x ועל האסימפטוטה האופקית שלה נקבל שנקודת הקיצון היחידה שלה חייבת להיות מימין לנקודת החיתוך ברביע הראשון. ניעזר עכשיו בגרף של הפונקציה $f(x)$ ונקבל שהגרף של הפונקציה $f'(x)$ ייראה כמו בציור משמאל.

דוגמא ב':

(1) חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$ עפ"י הסעיפים של הדוגמא הקודמת.

(2) שרטט את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$ ומצא את התחום שבו הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ היא חיובית וגם פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ היא חיובית אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

פתרון:

(1) א. **תחום הגדרה** – כדי למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה נשווה את המכנה לאפס. נקבל $x^2-4x+3=0$. פתרונות המשוואה הריבועית הם: $x_1=1$, $x_2=3$. לכן תחום ההגדרה הוא $x \neq 1$, $x \neq 3$.

ב. **נקודות קיצון** – נגזור את הפונקציה ונשווה ל-0:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4x+3) - x^2(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{2x^3-8x^2+6x-2x^3+4x^2}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2} = 0$$

כלומר $-4x^2+6x=0$ והפתרונות הם: $x_1=0$, $x_2=1.5$. חישוב y נותן $y_1=0$, $y_2=-3$. כדי לקבוע את סוג נקודות הקיצון מספיק לגזור את המונה של הנגזרת הראשונה, נקבל $-8x+6$. לכן $(0,0)$ היא נקודת מינימום ו- $(1.5,-3)$ היא נקודת מקסימום.

ג. **תחומי עלייה וירידה** – המכנה של הנגזרת הראשונה הוא חיובי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה ולכן נשאר לבדוק מתי המונה של הנגזרת הראשונה הוא חיובי ומתי הוא שלילי. הפתרון של אי השוויון הריבועי $-4x^2+6x > 0$ הוא $0 < x < 1.5$ והפתרון של אי השוויון הריבועי $-4x^2+6x < 0$ הוא $x < 0$ או $x > 1.5$. בהתחשב בתחום ההגדרה של הפונקציה נקבל: הפונקציה עולה (לחוד) בתחומים: $0 < x < 1$ או $1 < x < 1.5$ ויורדת (לחוד) בתחומים: $x < 0$ או $1.5 < x < 3$ או $x > 3$.

ד. **נקודות חיתוך עם הצירים** – הפונקציה חותכת את ציר ה- x ואת ציר ה- y בנקודה $(0,0)$.

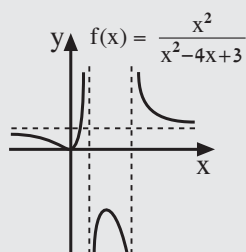
ה. **אסימפטוטות אנכיות** – המכנה שווה ל-0 עבור $x=1$ ו- $x=3$. קל לראות שהמונה לא מתאפס בנקודות אלה ולכן אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x הן $x=1$ ו- $x=3$.

אסימפטוטה אופקית – החזקה הגבוהה ביותר במונה היא x^2 והמקדם הוא 1. גם החזקה הגבוהה ביותר במכנה היא x^2 וגם כאן המקדם הוא 1. לכן אסימפטוטה אופקית היא $y = \frac{1}{1} = 1$.

לסיכום – האסימפטוטות המאונכות לצירים הן: $x=1$, $x=3$, $y=1$.

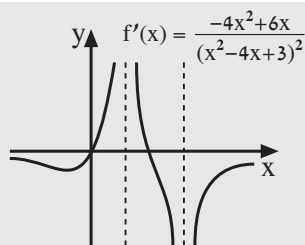
ו. **התיאור הגרפי** – את התוצאות שקיבלנו ניתן לסכם בטבלה.

x	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 1.5$	1.5	$1.5 < x < 3$	3	$x > 3$
$f'(x)$	-	0	+		+	0	-		-
עלייה ירידה		מינימום				מקסימום			



התיאור הגרפי מופיע משמאל.

(2) עפ"י הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ שבפתרון של סעיף ב' קל לראות שהאסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ הן $y=0$, $x=1$, $x=3$. כמו כן, בדומה למה שהוסבר בדוגמא הקודמת נקבל שהגרף של הפונקציה $f'(x)$ ייראה כמו



בציור משמאל. (שים לב למיקומה של נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f'(x)$. לפונקציה $f'(x)$ יש נקודת קיצון יחידה כי עפ"י הנתון, לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול יחידה).

עפ"י תחומי העלייה של הפונקציה $f(x)$ נקבל שהפונקציה $f'(x)$ חיובית בתחום $0 < x < 1$

או $1 < x < 1.5$. נמצא עכשיו את התחום שבו

הפונקציה $f''(x)$ חיובית, תחום זה הוא התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ עולה. אם נסמן

ב- x_1 את שיעור x של נקודת הקיצון של $f'(x)$ נקבל שהפונקציה $f''(x)$ חיובית בתחום $x_1 < x < 1$ או $x > 3$. ע"י התבוננות בכל התחומים שהתקבלו נוכל לסכם:

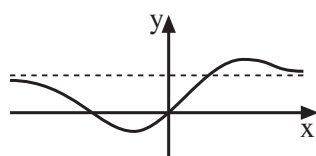
הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$ חיוביות בתחום $0 < x < 1$.

תרגילים

(חקירת פונקציה – פונקציות רציונאליות)

הערה: ראה גם תרגילים 28 – 1 החל מעמ' 102.

חקירת פונקציה כאשר הגרף נתון – פונקציות רציונאליות



1) בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 3}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. מצא את האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- x .

ו. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

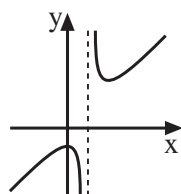
ז. מצא את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ היא חיובית וגם הנגזרת שלה $f'(x)$ היא חיובית.

ח. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

ט. מהן נקודות החיתוך של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה- x ? נמק.

י. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$

אם ידוע שלפונקציה $f'(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות קיצון.



2) בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = x - \frac{1}{1-x}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

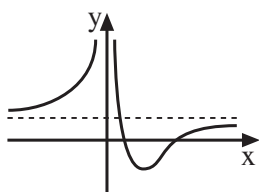
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .

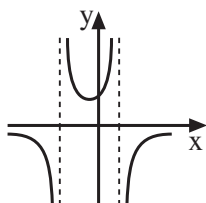
(המשך התרגיל בעמ' הבא)

- ה. מצא את האסימפטוטה של הפונקציה המאונכת לציר ה- x .
- ו. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה:
- (1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.
- ז. מעבירים בכל אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה משיק לגרף הפונקציה. מהו המרחק בין שני המשיקים?
- ח. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.
- ט. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.
- י. מצא, עפ"י הגרף של הפונקציה $f'(x)$, את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f''(x)$.
- יא. מצא את התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ חיובית וגם הפונקציה $f''(x)$ חיובית.
- יב. שרטט בצורה כללית את הגרף של הפונקציה $|f(x)|$. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה $|f(x)|$?



(3) בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2}$

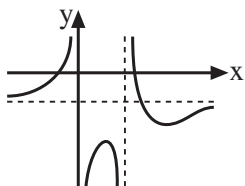
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- ו. מצא את התחום שבו הפונקציה שלילית.
- ז. מצא את התחום שבו הפונקציה שלילית וגם הנגזרת שלה שלילית.
- ח. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.
- ט. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת.
- י. הראה שאין תחום שבו הפונקציה $f'(x)$ שלילית וגם הפונקציה $f''(x)$ שלילית.
- יא. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$.
- (1) מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.
- (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
- (3) ידוע שהפונקציה $g(x)$ חותכת את ציר ה- x בנקודה ששיעור ה- x שלה בקירוב הוא $x = 4.071$ ונקודות הקיצון שלה נמצאות מתחת לציר ה- x . שרטט בצורה כללית את הגרף של $g(x)$.



(4) בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{-4}{x^2 + 2x - 3}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- (המשך התרגיל בעמ' הבא)

- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.
 ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
 ו. מבלי לבצע חישובים מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x) = \frac{4}{x^2+2x-3}$.
 ז. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.
 ח. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$.
 אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.
 ט. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 1$.
 (1) הסבר מדוע לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון.
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה (אם יש כאלה) של הפונקציה $g(x)$.
 (3) ישר ששיפועו $-\frac{1}{3}$ **משיק** לגרף הפונקציה $g(x)$. מצא את שיעור ה-x של נקודת ההשקה.



- (5) בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{12-x^2}{x^2-3x}$.
 א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.
 ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
 ו. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם האסימפטוטה האופקית שלה.
 ז. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.
 ח. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$.
 אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת.
 ט. מצא את התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ שלילית וגם הפונקציה $f''(x)$ שלילית.
 י. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g(x) = (f(x))^2$. מצא עפ"י החקירה של $f(x)$ את הנקודות בהן הנגזרת של $g(x)$ מתאפסת.
 יא. $h(x)$ היא פונקציה המקיימת: $h(x) = \frac{1}{f(x)}$. מצא עפ"י סעיף ד' את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $h(x)$ ועפ"י סעיף ב' את נקודות הקיצון שלה.

חקירת פונקציה כאשר הגרף לא נתון – פונקציות רציונאליות

חקירת פונקציות בתרגילים שלהלן תיעשה עפ"י הסעיפים הבאים והיא כוללת מציאת:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון.
 ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
 ה. אסימפטוטות המאונכות לצירים. ו. שרטוט גרף הפונקציה.

חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים שרשומים בתחילת סעיף זה (בעמ' הקודם):
(פונקציות ללא אסימפטוטות אנכיות)

$$y = \frac{3x^2}{x^2+3} \quad (8)$$

$$y = \frac{-2x}{x^2+4} \quad (7)$$

$$y = \frac{4x}{x^2+1} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \quad (11)$$

$$y = \frac{x^2-3x}{x^2+3} \quad (10)$$

$$y = \frac{3-x^2}{x^2+2} \quad (9)$$

חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים שרשומים בתחילת סעיף זה:
(פונקציות עם אסימפטוטה אנכית אחת)

$$y = \frac{x^2}{x+2} \quad (14)$$

$$y = \frac{x^2}{1-x} \quad (13)$$

$$y = \frac{x^2+1}{x} \quad (12)$$

$$y = \frac{12-4x}{(x-2)^2} \quad (17)$$

$$y = \frac{x}{(x-1)^2} \quad (16)$$

$$y = \frac{x-1}{x^2} \quad (15)$$

חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים שרשומים בתחילת סעיף זה:
(פונקציות עם שתי אסימפטוטות אנכיות)

$$y = \frac{10-2x}{x^2-9} \quad (20)$$

$$y = \frac{1+3x}{x-x^2} \quad (19)$$

$$y = \frac{4x+1}{x^2-2x} \quad (18)$$

$$y = \frac{x}{x^2-x-6} \quad (23)$$

$$y = \frac{2x^2-5x+2}{3x^2-10x+3} \quad (22)$$

$$y = \frac{-x}{x^2-10x+16} \quad (21)$$

חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים שרשומים בתחילת סעיף זה:
(פונקציות עם נקודת אי הגדרה שבה אין לפונקציה אסימפטוטה אנכית)

$$y = \frac{x^3-3x^2}{9-x^2} \quad (26)$$

$$y = \frac{x^2+4x+3}{1-x^2} \quad (25)$$

$$y = \frac{x-2}{x^2-4} \quad (24)$$

חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים שרשומים בתחילת סעיף זה:
(פונקציות מכל הסוגים)

$$y = \frac{-x^2}{(x-3)^2} \quad (29)$$

$$y = \frac{2x^2}{(x-1)^2} \quad (28)$$

$$y = \frac{x^2+x-2}{x^2-x+2} \quad (27)$$

$$y = \frac{2x^2-6x-8}{(2x-3)^2} \quad (32)$$

$$y = \frac{x^2-5}{x^2-x-2} \quad (31)$$

$$y = \frac{x}{x^2-6x+8} \quad (30)$$

$$y = \frac{2x^2+3x-2}{-x^2+x+6} \quad (35)$$

$$y = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1} \quad (34)$$

$$y = \frac{x^2-4x}{x^2-4x-12} \quad (33)$$

$$y = \frac{x^3}{x^2-3} \quad (38)$$

$$y = \frac{(x-2)^2}{(x-1)^4} \quad (37)$$

$$y = \frac{x^3}{4-2x} \quad (36)$$

חקירת פונקציה עם פרמטרים – פונקציות רציונאליות

(39) לפונקציה $f(x) = \frac{12x}{x^2 - 6x + a}$ יש נקודת קיצון בנקודה $x = -3$.

- מצא את a .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.
- שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

(40) הישר $x = -1$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $f(x) = \frac{-x}{x^2 - x + a}$.

- מצא את a ואת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
- הסבר מדוע אין תחום משותף שבו הפונקציה $f'(x)$ שלילית וגם הפונקציה $f''(x)$ שלילית.
- שרטט בצורה כללית גרף של הפונקציה $|f(x)|$.

(41) לפונקציה $f(x) = \frac{x+b}{x^2+ax-4}$ יש נקודת קיצון בנקודה $(1, -1)$.

- מצא את a ו- b ואת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
- שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת.
- מצא את התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ חיובית וגם הפונקציה $f''(x)$ חיובית.

(42) לפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x-4} + b$ יש נקודת מינימום בנקודה ששיעור ה- y שלה הוא 18.

- מצא את b .
 - מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- (המשך התרגיל בעמ' הבא)

- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ד. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.
 ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ו. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה:
 (1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.
 ז. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x < 4$.
 (1) מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
 (3) ידוע שהפונקציה $g(x)$ חותכת את ציר ה- x בנקודה $x = 3.851$ בקירוב ונקודות הקיצון שלה נמצאות מעל לציר ה- x . שרטט בצורה כללית גרף של הפונקציה $g(x)$.
 (4) מעבירים **משק** לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 3$. מצא את שיעור ה- x של הנקודה שנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והמשיק בה לגרף הפונקציה $g(x)$ **מקביל** למשיק הני"ל.

(43) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+ax}{x^2-4}$ בנקודה $x = 0$ הוא $\frac{1}{2}$.

- א. מצא את a .
 ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
 ד. הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון.
 ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ו. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

(44) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2-1}{b-x^2}$ בנקודה $x = 1$ הוא $\frac{2}{3}$. הישר

- $y = -1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה.
 א. מצא את a ו- b .
 ב. הצב את a ו- b שמצאת בפונקציה וחקור אותה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, אסימפטוטות אנכיות).
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ד. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
 ה. מצא כמה נקודות חיתוך יש לישר $y = k$ עם גרף הפונקציה אם:
 (1) $k > -\frac{1}{4}$ (2) $-1 < k < -\frac{1}{4}$.
 ו. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = c \cdot f(x) + 3c$, $c > 0$. נתון שהאסימפטוטה האופקית של $g(x)$ היא $y = 6$. מצא את c .

(45) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{(x-a)^2}{x^2-4}$ בנקודה $x = 1$ הוא $-\frac{4}{9}$.

- מצא את שני הערכים האפשריים ל- a .
- מצא עבור כל אחד מערכי a את נקודות הקיצון ואת האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטט עבור כל אחד מערכי a את גרף הפונקציה.
- סעיף זה מתייחס ל- a הגדול מבין השניים שמצאת בסעיף א'. נתון שגרף הפונקציה $g(x) = b + f(x)$ משיק לישר $y = 1$ בדיוק בנקודה אחת. מצא את שני הערכים האפשריים של b .

(46) לפונקציה $f(x) = \frac{x^3-7x}{x^2+a}$ יש נקודות קיצון ב- $x = 1$.

- מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כמה נקודות חיתוך יש לישר $y = 1$ עם גרף הפונקציה? נמק.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- שרטט את גרף הפונקציה.
- ה- x_1 ו- x_2 הם שני מספרים חיוביים והם שיעורי ה- x של שתי נקודות שעל גרף הפונקציה $f(x)$. נתון: $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. מצא באיזה תחום נמצא x_1 ובאיזה תחום נמצא x_2 .
- $g(x)$ היא הפונקציה שמקיימת $g(x) = f(-x)$. היעזר בסעיף א' ומצא את נקודות הקיצון של $g(x)$.

הבעה בעזרת פרמטרים – חקירת פונקציות רציונאליות

חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים שרשומים בתחתית עמ' 85. היעזר במידת הצורך בפרמטר a :

$$a > 0, y = \frac{(x-a)^2}{x} \quad (48) \qquad a > 0, y = \frac{x}{x^2+a^2} \quad (47)$$

$$a > 1, y = \frac{(x-a)^2}{x^2-1} \quad (50) \qquad a > 1, y = \frac{1-x^2}{(x-a)^2} \quad (49)$$

(51) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax}{x^2-x+1}$, $a > 0$. היעזר ב- a במידת הצורך וענה על:

הסעיפים הבאים:

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 - מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
 - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- (המשך התרגיל בעמ' הבא)

- ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. ענה על הסעיפים הבאים עבור $a < 0$:
 - (1) מצא את נקודות הקיצון וקבע את סוגן.
 - (2) מצא את תחומי העלייה והירידה.
 - (3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(52) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3x^2}{(x-a)^2}$, $a > 0$. היעזר ב- a במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ו. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה עם האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x .
- ז. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ח. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.
- ט. שרטט בצורה כללית, בהסתמך על הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת.
- י. מצא את התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ חיובית וגם הפונקציה $f''(x)$ חיובית.

(53) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 3ax}{x-a}$, $a > 0$. היעזר ב- a במידת הצורך ומצא:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות חיתוך עם הצירים.
- ג. אסימפטוטה המאונכת לציר ה- x .
- ד. נקודות קיצון.
- ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. תחומי עלייה וירידה.
- ז. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה:
 - (1) בנקודה אחת.
 - (2) באף נקודה.
 - (3) בשתי נקודות.
- ח. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x < a$. ענה על הסעיפים הבאים:

- (1) מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.
- (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(54) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - ax - 2a^2}$, $a > 0$. היעזר ב- a במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 - ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
 - ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- (המשך התרגיל בעמ' הבא)

- ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ז. שרטט בצורה כללית, בהסתמך על הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.
ח. שרטט בצורה כללית, בהסתמך על תשובותיך לסעיפים א'-ו', את הגרף של הפונקציה $f(x)$ עבור $a < 0$.

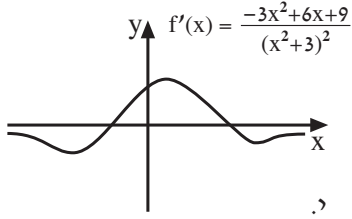
(55) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x^2 - a^2)^2}$, $a > 0$. היעזר ב- a במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
ד. הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון.
ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ז. מצא את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ שלילית וגם הפונקציה $f'(x)$ שלילית.
ח. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה- y .
ט. שרטט בצורה כללית, בהסתמך על הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.
י. מצא את התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ חיובית וגם הפונקציה $f''(x)$ חיובית.

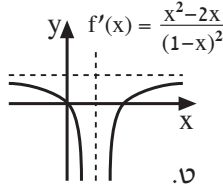
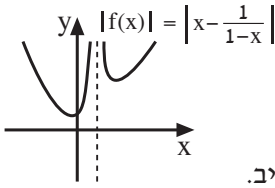
(56) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + 4}{bx^2 + 1}$, $a > 0$, $4b > a$.

- א. היעזר ב- a ו- b במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:
(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
(3) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
(4) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ב. שרטט בצורה כללית, בהסתמך על הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של:
(1) הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שיש לה בדיוק שתי נקודות קיצון.
(2) הפונקציה $f(x)$ עבור $a > 0$, $0 < 4b < a$.
ג. נתון שהישר $y = 2$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ (כאשר $a > 0$, $4b > a$).
כמו כן, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 1$ יוצר זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
(1) מצא את a ו- b .
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
(3) הוכח שגרף הפונקציה נמצא כולו מעל האסימפטוטה $y = 2$.

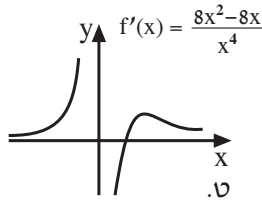
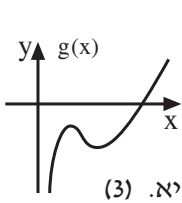
תשובות (חקירת פונקציה – פונקציות רציונאליות):



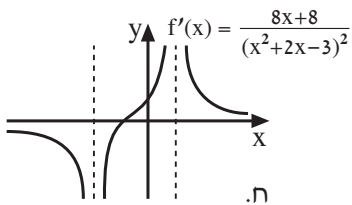
- (1) א. כל x . ב. $(3, 1\frac{1}{2})$ מקסימום, $(-1, -\frac{1}{2})$ מינימום. ג. עולה: $-1 < x < 3$, יורדת: $x < -1$ או $x > 3$. ד. $(0, 0)$, $(-3, 0)$. ה. $y = 1$. ו. חיובית: $x < -3$ או $x > 3$, שלילית: $-3 < x < 0$. ז. $0 < x < 3$. ח. $y = 0$. ט. $(-1, 0)$, $(3, 0)$.



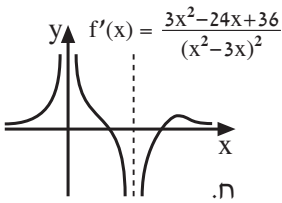
- (2) א. $x \neq 1$. ב. $(2, 3)$ מינימום, $(0, -1)$ מקסימום. ג. עולה: $x > 2$ או $x < 0$. ד. $x < 0$ יורדת: $0 < x < 2$. ה. $x = 1$. ו. $k = 3$. ז. $k = -1$. ח. $k > 3$ או $k < -1$. ט. $-1 < k < 3$. י. חיובית: $x > 1$, שלילית: $x < 1$. יא. $x > 2$. יב. $(2, 3)$ מינימום, $(0, 1)$ מינימום.



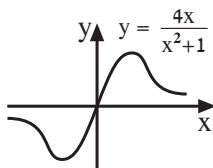
- (3) א. $x \neq 0$. ב. $(1, -1)$ מינימום. ג. עולה: $x < 0$ או $x > 1$, יורדת: $0 < x < 1$. ד. $(2, 0)$, $(\frac{2}{3}, 0)$. ה. $y = 3$, $x = 0$. ו. $\frac{2}{3} < x < 2$. ז. $\frac{2}{3} < x < 1$. ח. $x = 0$. ט. $y = 0$. י. $x = 2$ מקסימום, $x = \frac{2}{3}$ מינימום. יא. $0 < x < \frac{2}{3}$ או $x > 2$, יורדת: $\frac{2}{3} < x < 2$.



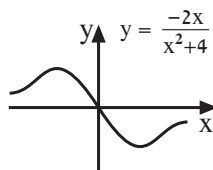
- (4) א. $x \neq -3$, $x \neq 1$. ב. $(-1, 1)$ מינימום. ג. עולה: $-1 < x < 1$ או $x > 1$, יורדת: $x < -3$ או $-3 < x < -1$. ד. $(0, 1\frac{1}{3})$. ה. $x = -3$, $x = 1$. ו. $y = 0$. ז. $(-1, -1)$ מקסימום. ח. $x = -3$, $x = 1$. ט. $y = 0$. י. $x > 1$ יורדת: $x = 3$.



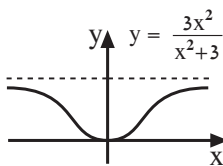
- (5) א. $x \neq 0$, $x \neq 3$. ב. $(2, -4)$ מקסימום, $(6, -1\frac{1}{3})$ מינימום. ג. עולה: $x < 0$ או $0 < x < 2$ או $x > 6$, יורדת: $2 < x < 3$ או $3 < x < 6$. ד. $(-\sqrt{12}, 0)$, $(\sqrt{12}, 0)$. ה. $x = 0$, $x = 3$, $y = -1$. ו. $(4, -1)$. ז. $x = 3$, $x = 0$. ח. $y = 0$. ט. $2 < x < 3$. י. $(-\sqrt{12}, 0)$, $(\sqrt{12}, 0)$, $(2, 16)$, $(6, \frac{16}{9})$. יא. $x = -\sqrt{12}$, $x = \sqrt{12}$; $(2, -\frac{1}{4})$ מינימום, $(6, -\frac{3}{4})$ מקסימום.



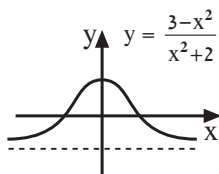
- (6) א. כל x . ב. $(-1, -2)$ מינימום,
 (1, 2) מקסימום. ג. עולה: $-1 < x < 1$,
 יורדת: $x > 1$ או $x < -1$. ד. $(0, 0)$.
 ה. $y = 0$.



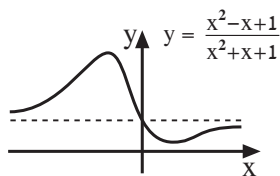
- (7) א. כל x . ב. $(2, -\frac{1}{2})$ מינימום,
 $(-\frac{1}{2}, 2)$ מקסימום. ג. עולה: $x < -2$,
 או $x > 2$, יורדת: $-2 < x < 2$.
 ד. $(0, 0)$. ה. $y = 0$.



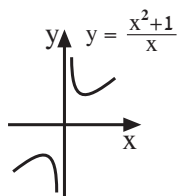
- (8) א. כל x .
 ב. $(0, 0)$ מינימום. ג. עולה:
 $x > 0$, יורדת: $x < 0$.
 ד. $(0, 0)$. ה. $y = 3$.



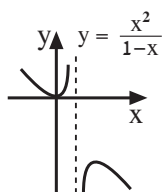
- (9) א. כל x . ב. $(0, 1\frac{1}{2})$ מקסימום.
 ג. עולה: $x < 0$, יורדת: $x > 0$.
 ד. $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$, $(0, 1\frac{1}{2})$.
 ה. $y = -1$.



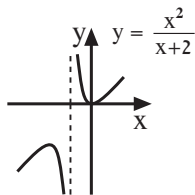
- (11) א. כל x . ב. $(1, \frac{1}{3})$ מינימום,
 $(-1, 3)$ מקסימום. ג. עולה: $x < -1$,
 או $x > 1$, יורדת: $-1 < x < 1$.
 ד. $(0, 1)$. ה. $y = 1$.



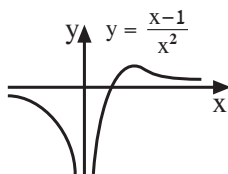
- (12) א. $x \neq 0$. ב. $(1, 2)$ מינימום,
 $(-1, -2)$ מקסימום. ג. עולה: $x < -1$,
 או $x > 1$, יורדת: $0 < x < 1$ או
 $-1 < x < 0$. ד. אין. ה. $x = 0$.



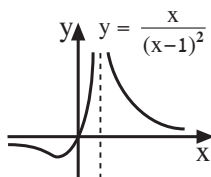
- (13) א. $x \neq 1$. ב. $(0, 0)$ מינימום,
 $(2, -4)$ מקסימום. ג. עולה: $1 < x < 2$,
 או $0 < x < 1$, יורדת: $x < 0$ או $x > 2$.
 ד. $(0, 0)$. ה. $x = 1$.



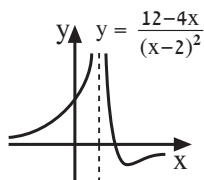
- 14** א. $x \neq -2$ ב. $(0,0)$ מינימום,
 ג. עולה: $x > 0$
 או $x < -4$, יורדת: $-2 < x < 0$ או
 ד. $(0,0)$ ה. $x = -2$ $-4 < x < -2$



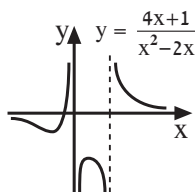
- 15** א. $x \neq 0$ ב. $(2, \frac{1}{4})$ מקסימום.
 ג. עולה: $0 < x < 2$, יורדת: $x < 0$
 או $x > 2$ ד. $(1,0)$ ה. $x = 0$,
 $y = 0$



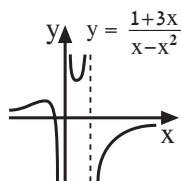
- 16** א. $x \neq 1$ ב. $(-1, -\frac{1}{4})$ מינימום.
 ג. עולה: $-1 < x < 1$, יורדת: $x < -1$
 או $x > 1$ ד. $(0,0)$ ה. $x = 1$,
 $y = 0$



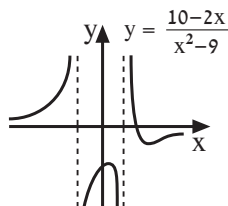
- 17** א. $x \neq 2$ ב. $(4, -1)$ מינימום.
 ג. עולה: $x < 2$ או $x > 4$, יורדת:
 $2 < x < 4$ ד. $(0,3)$, $(3,0)$
 ה. $x = 2$, $y = 0$



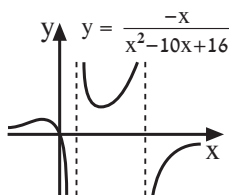
- 18** א. $x \neq 2$, $x \neq 0$ ב. $(\frac{1}{2}, -4)$ מקסימום,
 ג. עולה: $0 < x < \frac{1}{2}$ או $(-1, -1)$ מינימום.
 $-1 < x < 0$ או $x < -1$, יורדת: $\frac{1}{2} < x < 2$ או
 $x > 2$ ד. $(-\frac{1}{4}, 0)$ ה. $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$



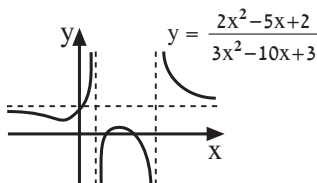
- 19** א. $x \neq 1$, $x \neq 0$ ב. $(-1, 1)$ מקסימום,
 ג. עולה: $x < -1$ או $\frac{1}{3} < x < 1$ מינימום.
 $-1 < x < 0$ או $0 < x < \frac{1}{3}$, יורדת: $x > 1$
 ד. $(-\frac{1}{3}, 0)$ ה. $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$



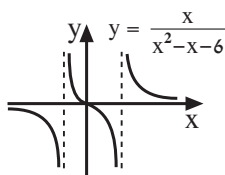
- 20** א. $x \neq -3$, $x \neq 3$ ב. $(1, -1)$ מקסימום,
 ג. עולה: $x > 9$ או $-3 < x < 1$ מינימום.
 $3 < x < 9$ או $1 < x < 3$, יורדת: $x < -3$
 ד. $(0, -\frac{10}{9})$, $(5, 0)$ ה. $x = -3$, $x = 3$, $y = 0$



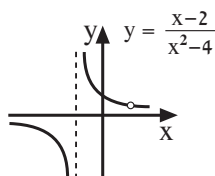
- (21)** א. $x \neq 2, x \neq 8$. ב. $(4, \frac{1}{2})$ מינימום,
 ג. עולה: $x < -4$ או $(-4, \frac{1}{18})$
 יורדת: $4 < x < 8$ או $x > 8$
 ד. $(0, 0)$. ה. $-4 < x < 2$, $x = 2$, $x = 8$, $y = 0$.



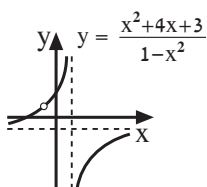
- (22)** א. $x \neq \frac{1}{3}, x \neq 3$. ב. $(-1, \frac{9}{16})$ מינימום,
 ג. עולה: $\frac{1}{3} < x < 1$ או $-1 < x < \frac{1}{3}$,
 יורדת: $x < -1$ או $1 < x < 3$ או $x > 3$. ד. $(0, \frac{2}{3})$,
 ה. $(\frac{1}{2}, 0)$, $(2, 0)$. ה. $x = \frac{1}{3}, x = 3, y = \frac{2}{3}$.



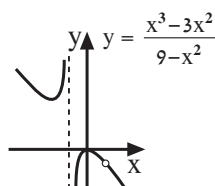
- (23)** א. $x \neq -2, x \neq 3$. ב. אין.
 ג. יורדת: $x < -2$ או $-2 < x < 3$
 או $x > 3$. ד. $(0, 0)$. ה. $x = 3$,
 $y = 0, x = -2$.



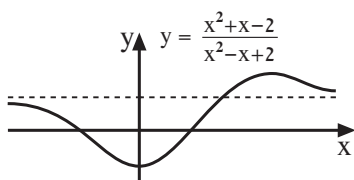
- (24)** א. $x \neq -2, x \neq 2$. ב. אין.
 ג. יורדת: $x > 2$ או $-2 < x < 2$
 או $x < -2$. ד. $(0, \frac{1}{2})$. ה. $x = -2, y = 0$.



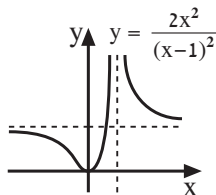
- (25)** א. $x \neq -1, x \neq 1$. ב. אין.
 ג. עולה: $x > 1$ או $-1 < x < 1$
 או $x < -1$. ד. $(-3, 0)$, $(0, -3)$. ה. $x = 1, y = -1$.



- (26)** א. $x \neq -3, x \neq 3$. ב. $(0, 0)$ מקסימום,
 ג. עולה: $-3 < x < 0$ או $(-6, -12)$ מינימום.
 יורדת: $-6 < x < -3$ או $0 < x < 3$
 או $x > 3$. ד. $(0, 0)$. ה. $x = -3$.



- (27)** א. כל x . ב. $(0, -1)$ מינימום,
 ג. עולה: $0 < x < 4$, $(4, \frac{2}{7})$ מקסימום.
 יורדת: $x < 0$ או $x > 4$. ד. $(0, -1)$,
 ה. $(-2, 0)$, $(1, 0)$. ה. $y = 1$.

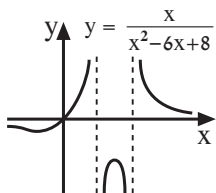


(28) א. $x \neq 1$ ב. $(0,0)$ מינימום.

ג. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $x < 0$

או $x > 1$ ד. $(0,0)$ ה. $x = 1$

$y = 2$



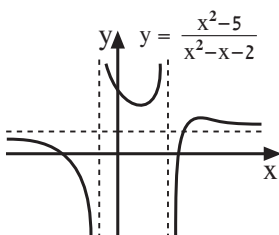
(30) א. $x \neq 2, x \neq 4$ ב. $(-\sqrt{8}, -0.09)$

מינימום, $(\sqrt{8}, -2.91)$ מקסימום. ג. עולה:

$-\sqrt{8} < x < 2$ או $2 < x < \sqrt{8}$ יורדת:

$x < -\sqrt{8}$ או $\sqrt{8} < x < 4$ או $x > 4$

ד. $(0,0)$ ה. $x = 2, x = 4, y = 0$



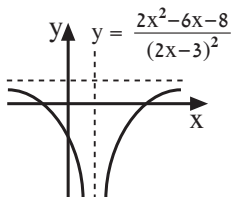
(31) א. $x \neq -1, x \neq 2$ ב. $(1,2)$ מינימום,

מקסימום. ג. עולה: $2 < x < 5$ או $(5, \frac{10}{9})$

$1 < x < 2$ יורדת: $x > 5$ או $-1 < x < 1$

ד. $(-\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0), (0, 2\frac{1}{2})$ או $x < -1$

ה. $x = -1, x = 2, y = 1$



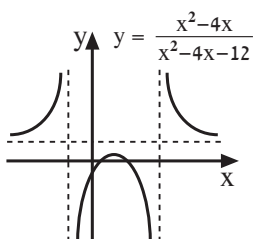
(32) א. $x \neq 1.5$

ב. אין.

ג. עולה: $x > 1.5$, יורדת: $x < 1.5$

ד. $(-1,0), (4,0), (0, -\frac{8}{9})$

ה. $x = 1.5, y = \frac{1}{2}$



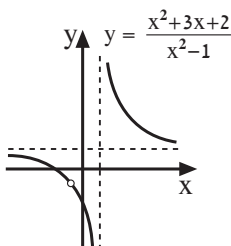
(33) א. $x \neq -2, x \neq 6$ ב. $(2, \frac{1}{4})$

מקסימום. ג. עולה: $-2 < x < 2$ או

$x < -2$ יורדת: $2 < x < 6$ או $x > 6$

ד. $(0,0), (4,0)$ ה. $x = -2, x = 6$

$y = 1$



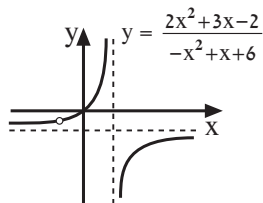
(34) א. $x \neq -1, x \neq 1$

ב. אין. ג. יורדת: $x < -1$

או $-1 < x < 1$ או $x > 1$

ד. $(-2,0), (0,-2)$

ה. $x = 1, y = 1$

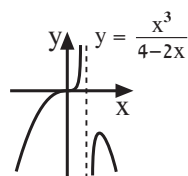


35 א. $x \neq -2, x \neq 3$.

ב. אין. ג. עולה: $x < -2$.

ד. $-2 < x < 3$ או $x > 3$.

ה. $x = 3, y = -2$.

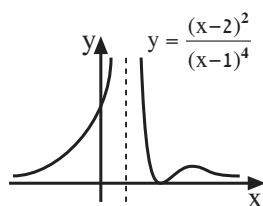


36 א. $x \neq 2$. ב. $(3, -13\frac{1}{2})$.

ג. עולה: $2 < x < 3$.

ד. $x < 2$ או $x > 3$, יורדת: $x > 3$.

ה. $(0,0)$. ה. $x = 2$.



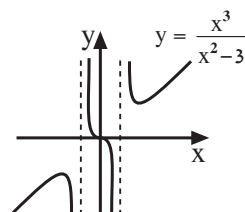
37 א. $x \neq 1$. ב. $(2,0)$ מינימום,

ג. עולה: $x < 1$ מקסימום. $(3, \frac{1}{16})$

ד. $2 < x < 3$ או $x > 3$, יורדת: $1 < x < 2$.

ה. $x > 3$ או $x < 2$, יורדת: $(0,4), (2,0)$.

ו. $x = 1, y = 0$.



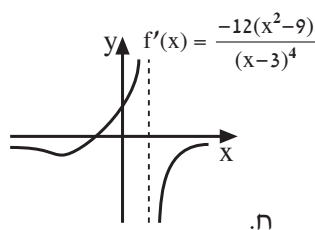
38 א. $x \neq \pm\sqrt{3}$. ב. $(3,4.5)$ מינימום,

ג. עולה: $x < -3$ מקסימום. $(-3, -4.5)$

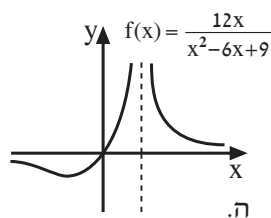
ד. $x > 3$ או $-3 < x < -\sqrt{3}$, יורדת: $-3 < x < \sqrt{3}$.

ה. $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ או $\sqrt{3} < x < 3$. ד. $(0,0)$.

ו. $x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$.



ח.



ה.

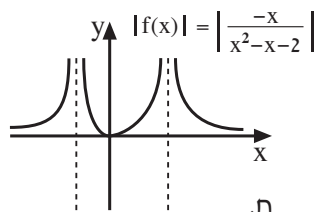
39 א. 9. ב. $x \neq 3$.

ג. $(-3, -1)$ מינימום.

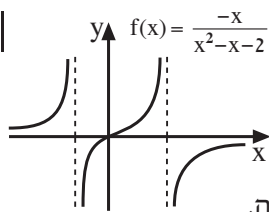
ד. $x = 3, y = 0$. ו. חיובית:

$x > 0$, שלילית: $x < 0$.

ז. $x = 3, y = 0$.



ח.



ה.

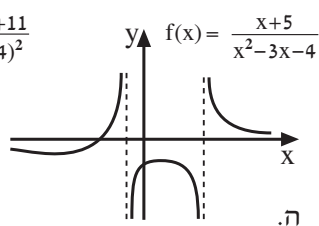
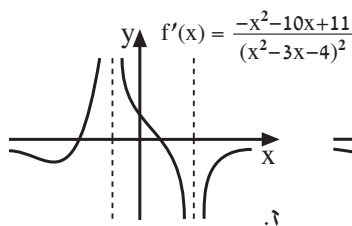
40 א. -2 ; $x \neq -1, x \neq 2$.

ג. עולה: $x < -1$ או $-1 < x < 2$.

ד. $x > 2$. $x = -1, x = 2, y = 0$.

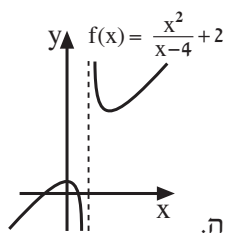
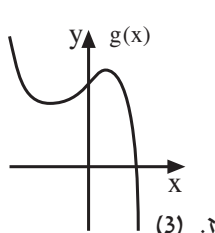
ו. חיובית: $x < -1$ או $0 < x < 2$.

שלילית: $-1 < x < 0$ או $x > 2$.

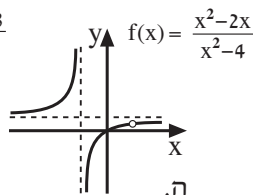
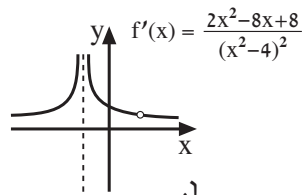


- (41) א. $b = 5, a = -3$;
 ב. $x \neq -1, x \neq 4$ (הפתרון)
 ג. $a = 3, b = -1$ לא ייתכן.
 ד. $(1, -1)$ מקסימום,
 ה. $(-11, -0.04)$ מינימום;
 עולה: $-11 < x < -1$

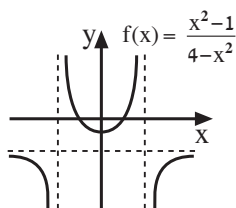
- או $-1 < x < 1$, יורדת: $x < -11$ או $1 < x < 4$ או $x > 4$. ג. $x = -1, x = 4, y = 0$.
 ד. $(0, -\frac{5}{4}), (-5, 0)$. ו. חיובית: $-5 < x < -1$ או $x > 4$, שלילית: $x < -5$ או $-1 < x < 4$. ח. $-11 < x < -1$.



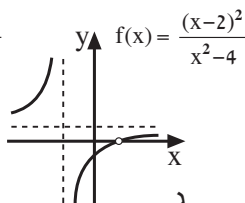
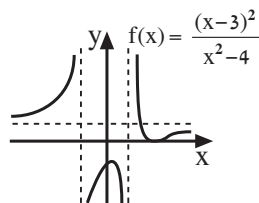
- (42) א. 2. ב. $(0, 2)$ מקסימום, $(8, 18)$ מינימום. ג. $(-4, 0), (2, 0), (0, 2)$. ד. $x = 4$.
 ו. $(1, 2), 18$. (2) $k < 2$ או $k > 18$.
 (3) $2 < k < 18$. ז. $x = 2$ מקסימום,
 ח. $x = -4$ מינימום. (2) עולה: $-4 < x < 2$,
 יורדת: $x < -4$ או $2 < x < 4$. (4) $x = -12$.



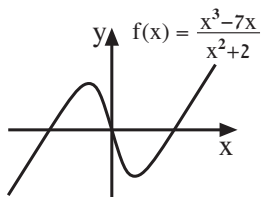
- (43) א. -2.
 ב. $x \neq -2, x \neq 2$.
 ג. $y = 1, x = -2$.



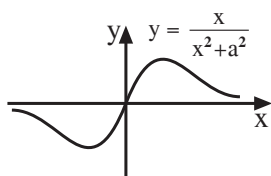
- (44) א. $b = 4, a = 1$. ב. תחום הגדרה: $x \neq \pm 2$. חיתוך עם הצירים: $(0, -\frac{1}{4}), (1, 0), (-1, 0)$. נקודות קיצון: $(0, -\frac{1}{4})$.
 מינימום. עולה: $0 < x < 2$ או $x > 2$, יורדת: $-2 < x < 2$ או $x < -2$.
 אסימפטוטות אנכיות: $x = 2, x = -2$. חיובית: $-1 < x < 1$ או $x < -2$, שלילית: $1 < x < 2$ או $x > 2$.
 ה. (1) שתיים. (2) אף נקודה. ו. $c = 3$.



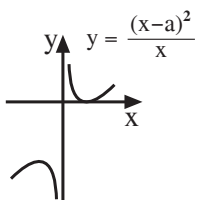
- (45) א. $a = 2$ או $a = 3$. ב. $a = 2$.
 אין קיצון; $x = -2, y = 1$. $a = 3$.
 (3, 0) מינימום, $(1\frac{1}{3}, -1\frac{1}{4})$ מקסימום;
 $x = 2, x = -2, y = 1$. ד. 1 או $2\frac{1}{4}$.



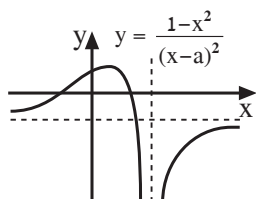
- (46)** א. $a = 2$; $(1, -2)$ מינימום, $(-1, 2)$ מקסימום.
 ב. שלוש. ג. $(\sqrt{7}, 0)$, $(0, 0)$, $(-\sqrt{7}, 0)$.
 ה. $x_1 > \sqrt{7}$, $0 < x_2 < \sqrt{7}$.
 ו. $(1, 2)$ מקסימום, $(-1, -2)$ מינימום.



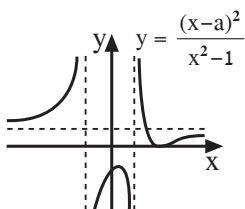
- (47)** א. כל x . ב. $(a, \frac{1}{2a})$ מקסימום, $(-a, -\frac{1}{2a})$ מינימום.
 ג. עולה: $-a < x < a$.
 יורדת: $x < -a$ או $x > a$. ד. $(0, 0)$.
 ה. $y = 0$.



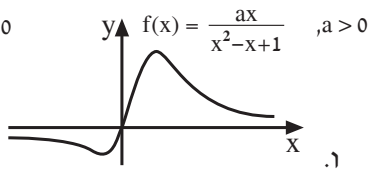
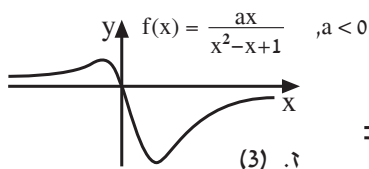
- (48)** א. $x \neq 0$. ב. $(a, 0)$ מינימום, $(-a, -4a)$ מקסימום.
 ג. עולה: $x < -a$ או $0 < x < a$.
 יורדת: $-a < x < 0$ או $x > a$.
 ד. $(a, 0)$. ה. $x = 0$.



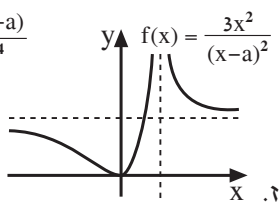
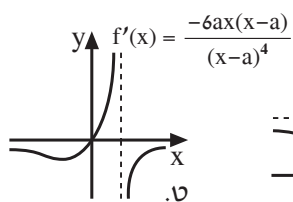
- (49)** א. $x \neq a$. ב. $(\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2-1})$ מקסימום.
 ג. עולה: $x < \frac{1}{a}$ או $x > a$.
 יורדת: $a < x < \frac{1}{a}$. ד. $(0, \frac{1}{a^2})$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$.
 ה. $x = a$, $y = -1$.



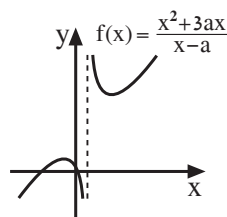
- (50)** א. $x \neq \pm 1$. ב. $(a, 0)$ מינימום, $(\frac{1}{a}, 1-a^2)$ מקסימום.
 ג. עולה: $x > a$ או $-1 < x < \frac{1}{a}$.
 יורדת: $1 < x < a$ או $\frac{1}{a} < x < 1$. ד. $(0, -a^2)$, $(a, 0)$.
 ה. $x = 1$, $y = 1$, $x = -1$.



- (51)** א. כל x . ב. $(1, a)$ מקסימום, $(-1, -\frac{a}{3})$ מינימום.
 ג. עולה: $-1 < x < 1$.
 יורדת: $x < -1$ או $x > 1$.
 ד. $y = 0$. ה. $(0, 0)$. ו. $(1, a)$ מינימום, $(-1, -\frac{a}{3})$ מקסימום.
 ז. עולה: $-1 < x < 1$.
 ח. $x > 1$ או $x < -1$. יורדת: $-1 < x < 1$.

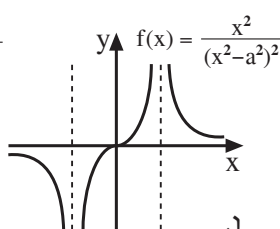
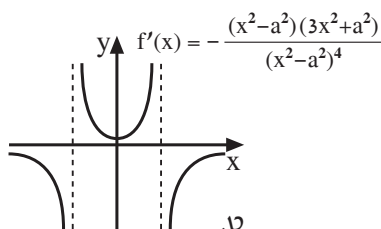
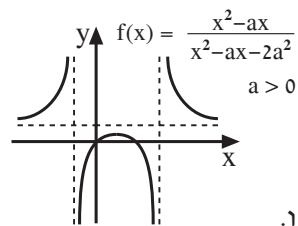
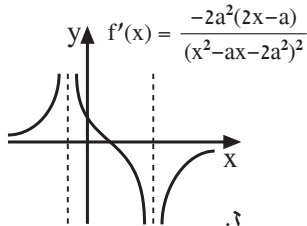
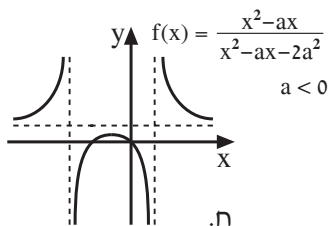


- (52)** א. $x \neq a$. ב. $(0,0)$ מינימום.
ג. עולה: $0 < x < a$, יורדת: $x < 0$
או $x > a$. ד. $(0,0)$. ה. $x = a$,
 $y = 3$. ו. $(\frac{a}{2}, 3)$. ח. $x = a$, $y = 0$.
י. $0 < x < a$.



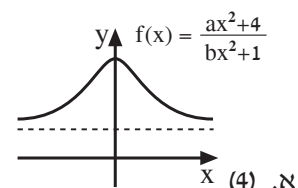
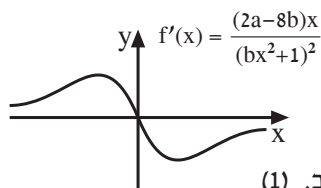
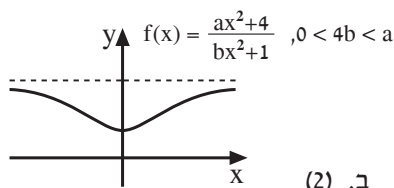
- (53)** א. $x \neq a$. ב. $(0,0)$, $(-3a,0)$. ג. $x = a$.
ד. $(3a,9a)$ מינימום, $(-a,a)$ מקסימום. ה. עולה:
 $x < -a$ או $x > 3a$, יורדת: $-a < x < a$ או $a < x < 3a$.
ז. (1) $k = a$, $k = 9a$. (2) $a < k < 9a$. (3) $k < a$ או
 $k > 9a$. ח. (1) $x = 0$ מקסימום, $x = -3a$ מינימום.
(2) עולה: $-3a < x < 0$, יורדת: $x < -3a$ או $0 < x < a$.

- (54)** א. $x \neq -a$, $x \neq 2a$. ב. $(0,0)$, $(a,0)$. ג. $x = -a$, $x = 2a$, $y = 1$. ד. $(\frac{a}{2}, \frac{1}{9})$ מקסימום.
ה. עולה: $x < -a$ או $-\frac{a}{2} < x < 2a$, יורדת: $-a < x < \frac{a}{2}$ או $x > 2a$.



- (55)** א. $x \neq -a$, $x \neq a$. ב. $(0,0)$. ג. $x = a$.
ה. עולה: $y = 0$, $x = -a$.
 $-a < x < a$, יורדת: $x < -a$ או $x > a$.
ז. $x < -a$. ח. $(0, \frac{1}{a^4})$. י. $0 < x < a$.

- (56)** א. (1) כל x . (2) $y = \frac{a}{b}$. (3) $(0,4)$ מקסימום. ג. (1) $a = 2$, $b = 1$. (2) עולה:
 $x < 0$, יורדת: $x > 0$.



נקודות קיצון מוחלטות – פונקציות רציונאליות

נביא דוגמא למציאת המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של פונקציה רציונאלית.

דוגמא:

מצא את המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+3}$ בתחום $-3 \leq x \leq 3$.

פתרון:

נגזור ונשווה לאפס, נקבל: $f'(x) = \frac{4x(x^2+3)-2x^2 \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{12x}{(x^2+3)^2} = 0$ ולכן

$x = 0$. ערך הפונקציה עבור $x = 0$ הוא $f(0) = 0$. ערך הפונקציה בקצוות הוא $f(-3) = f(3) = 1\frac{1}{2}$. לכן המינימום המוחלט הוא 0 והמקסימום המוחלט הוא $1\frac{1}{2}$.

הערות:

א) נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה בקטע הנ"ל הן: $(0,0)$ מינימום מוחלט, $(3, 1\frac{1}{2})$ מקסימום מוחלט, $(-3, 1\frac{1}{2})$ מקסימום מוחלט.

ב) הפונקציה מוגדרת לכל x ולכן הוכחנו למעשה את אי השוויון הבא: לכל $-3 \leq x \leq 3$ מתקיים $0 \leq \frac{2x^2}{x^2+3} \leq 1\frac{1}{2}$. (ראה גם עמ' 185).

תרגילים

(נקודות קיצון מוחלטות – פונקציות רציונאליות)

מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות הבאות בתחום הרשום לידן:

$$-1 \leq x \leq 4, y = \frac{x^2-5x+2}{x+2} \quad (2) \quad 2 \leq x \leq 5, y = \frac{(x-4)^2}{x-1} \quad (1)$$

$$[-2, 1], y = \frac{1-x}{(x-3)^2} \quad (3)$$

- א. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה בקטע הנ"ל.
 ב. האם יש לפונקציה בקטע הנ"ל מינימום מקומי שאיננו מוחלט? נמק.
 ג. האם יש לפונקציה בקטע הנ"ל מקסימום מקומי שאיננו מוחלט? נמק.

$$y = \frac{x}{x^2+1} \quad (4)$$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה.
 ג. הוכח ע"ס סעיפים א' ו-ב' את אי השוויון $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$ לכל x .

- (5) נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2+9}{x}$ בקטע הסגור $[1, 6]$.
 א. הוכח: לכל $1 \leq x \leq 6$ מתקיים אי השוויון $6 \leq \frac{x^2+9}{x} \leq 10$.
 ב. האם יש לפונקציה בקטע הנ"ל נקודת מקסימום מקומי שאינה נקודת מקסימום מוחלט? נמק.

- (6) לפונקציה $y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x = -4$.
 א. מצא את a .
 ב. מצא בתחום $1 \leq x \leq 4$ את המינימום של הפונקציה.
 ג. הוכח שבתחום $-10 \leq x \leq -1$ הפונקציה היא אי שלילית.

תשובות (נקודות קיצון מוחלטות – פונקציות רציונאליות):

- (1) $(4, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 4)$ מקסימום מוחלט. (3) א. $(1, 0)$ מינימום מוחלט, $(-1, \frac{1}{8})$ מקסימום מוחלט. ב. כן, $(-2, \frac{3}{25})$. ג. לא. (4) א. כל x . ב. $(-1, -\frac{1}{2})$ מינימום מוחלט, $(1, \frac{1}{2})$ מקסימום מוחלט. (5) כן, $(6, 7\frac{1}{2})$. (6) $a = 9$. ב. 2.

תרגילים לחזרה – חקירת פונקציות רציונאליות

סעיף זה כולל תרגילים לחזרה בחקירת פונקציות רציונאליות מכל הסוגים.

תרגילים

(תרגילים לחזרה – חקירת פונקציות רציונאליות)

חקירת פונקציות רציונאליות – ללא פרמטרים (חזרה)

- (1) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+x+3}$.
 א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
 ו. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה עם האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x .
 ז. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ח. נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = bf(x) - 3$, $b > 0$. ידוע שהמקסימום המוחלט של $g(x)$ הוא 5.
 (1) מצא את b . (2) מצא את המינימום המוחלט של $g(x)$.

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-6x}{x^2-6x+9}$

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- (1) מצא לאילו ערכי m אין פתרון למשוואה $f(x) = m$
- (2) כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = m$ אם $\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$?

(3) $f(x)$ היא פונקציה שהנגזרת שלה היא הפונקציה $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f'(x)$.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f'(x)$.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f'(x)$.
- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה $f'(x)$.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.
- ידוע שתחום ההגדרה של $f(x)$ הוא כמו תחום ההגדרה של $f'(x)$.
- (1) מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
- (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

- מצא את תחום ההגדרה.
- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון.
- מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים.
- מצא את תחומי העלייה והירידה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הוכח ע"ס החקירה וללא החקירה את אי השוויון: $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ לכל $x \neq 0$.
- נתון שגרף הפונקציה $g(x) = a + f(x)$ משיק לציר ה- x בדיוק בשתי נקודות. מצא את a .

(5) נתונה הפונקציה $y = \frac{2x^2+x}{x^2-3x-4}$

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(המשך התרגיל בעמ' הבא)

- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
 ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ז. מצא את התחום בו הפונקציה שלילית וגם הנגזרת שלה שלילית.

(6) נתונה הפונקציה $y = \frac{2x}{x^2+x-6}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ה. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה.
 ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ז. האם ייתכן שישר בעל שיפוע **אי שלילי** משיק לפונקציה? נמק.

(7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{5x-x^2}{x^2-6x+5}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים והסבר מדוע יש רק אסימפטוטה אחת המקבילה לציר ה- y .
 ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה).
 ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ז. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הישר $y = -\frac{1}{4}x$ עם הפונקציה הנ"ל.

(8) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{5x^3+4x}{x^2-1}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לציר ה- x .
 ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ז. נתון: $f(a) = 16$. חשב את $f(-a)$. נמק את תשובתך.

חקירת פונקציות רציונאליות – מציאת פרמטרים (חזרה)

(9) לפונקציה $f(x) = \frac{(x+a)^2}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ב- $x = -\frac{1}{2}$.

- א. מצא את שני הערכים האפשריים של a .
- ב. עבור ה- a השלילי שמצאת ענה על הסעיפים הבאים:
 - (1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 - (2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 - (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - (4) מצא את האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x .
 - (5) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = -f(x)$. מצא על סמך החקירה של $f(x)$ (בסעיף ב') את נקודות הקיצון של $g(x)$, את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$ ואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x .

(10) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{a}{x^2-4}$ בנקודה $x = -3$ הוא 6.

- א. מצא את a .
- ב. מצא:
 - (1) תחום הגדרה.
 - (2) נקודות חיתוך עם הצירים.
 - (3) נקודות קיצון.
 - (4) תחומי עלייה וירידה.
 - (5) אסימפטוטות המאונכות לצירים.
- ג. שרטט את גרף הפונקציה.
- ד. היעזר בגרף של $f(x)$ ושרטט את הגרף של $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

(11) נתונה הפונקציה $y = \frac{ax^2-6x+1}{(x-1)^2}$. שיעור ה- x של נקודת החיתוך של הפונקציה עם

האסימפטוטה שלה המקבילה לציר ה- x הוא 1.5.

- א. מצא את a .
- ב. מצא לגבי הפונקציה את נקודת הקיצון, את האסימפטוטות המקבילות לצירים ושרטט את הגרף שלה.
- ג. מצא כמה נקודות חיתוך יש לישר $y = k$ ולגרף הפונקציה אם:
 - (1) $k = 4$
 - (2) $k = 1$
 - (3) $k < 0$
 - (4) $k > 5$

(12) לפונקציה $f(x) = \frac{ax^2+4x-18}{x^2-b}$ יש אסימפטוטה $y = 2$ ואסימפטוטה $x = -2$.

- מצא את a ו- b .
- מצא את תחום ההגדרה ואת נקודות החיתוך עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה.
- שרטט את גרף הפונקציה.
- x_1 הוא מספר בתחום $-2 < x < 2$ ו- x_2 הוא מספר בתחום $x > 2$. נתון: $f(x_1) - f(x_2) = c$. באיזה תחום נמצא c ? נמק.

(13) הישר $x = 3$ הוא אסימפטוטה לפונקציה $f(x) = \frac{x+a}{bx-x^2}$. לפונקציה נקודת קיצון ב- $x = 1$.

- מצא את a ו- b ואת נקודת הקיצון.
- מצא אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים ונקודת קיצון נוספת.
- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת תחומי העלייה והירידה.
- שרטט את גרף הפונקציה.
- $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = (f(x))^2$. מצא עפ"י החקירה של $f(x)$ את הנקודות בהן הנגזרת של $g(x)$ מתאפסת.

(14) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+2x+11}{x^2-8x+c}$. ידוע שלפונקציה יש אסימפטוטה אחת בלבד.

- המאונכת לציר ה- x .
- מצא את c .
- מצא את תחום ההגדרה.
- מצא את נקודות הקיצון.
- מצא את תחומי העלייה והירידה.
- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את המינימום והמחלטה של הפונקציה בתחום $-4 \leq x \leq -2$.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של פונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = 2f(x)+1$.

(15) נתונה הפונקציה $y = \frac{ax-6}{x^2-4x-b}$. הישר $x = -1$ הוא אסימפטוטה לפונקציה.

- בנקודה שבה $x = -7$ לפונקציה יש נקודת קיצון.
 - מצא את a ו- b .
- (המשך התרגיל בעמ' הבא)

ב. הצב את a ו- b שמצאת בפונקציה ומצא את :

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(4) נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(16) נתונה הפונקציה $y = \frac{ax^2+bx-8}{(x+2)^2}$. הנקודה $(1, -\frac{5}{3})$ היא נקודת קיצון של הפונקציה.

א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. מצא אם יש נקודות קיצון נוספות.

ד. קבע את הסוג של נקודות הקיצון.

ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים ועם האסימפטוטה שלה המקבילה לציר ה- x .

ו. מצא את המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה בתחום $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

(17) נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2-3x+a}{x^2-3x+2}$. ישר המשיק לפונקציה בנקודה $x = -1$ חותך

את ציר ה- x בנקודה $x = \frac{7}{5}$.

א. הוכח: $a = 0$.

הצב בפונקציה $a = 0$ ומצא את :

ב. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. האסימפטוטות לפונקציה המקבילות לצירים.

ה. נקודות הקיצון של הפונקציה.

ו. נקודת החיתוך של הפונקציה עם האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x .

(18) נתונה הפונקציה $y = \frac{x^3+a}{x^2}$. הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = -1$

חותך את ציר ה- y בנקודה $(0, 12)$.

א. מצא את a .

ב. מצא את תחום ההגדרה ואת נקודת החיתוך עם ציר ה- x .

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ד. מצא את האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x .

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. הוכח שעבור $x > 0$ מתקיים אי השוויון $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$.

(19) נתונה הפונקציה $y = \frac{x^3}{3x+a}$, $a > 0$. לפונקציה יש נקודת קיצון ששיעור ה- y שלה הוא 9.

- מצא את a .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת נקודות החיתוך שלה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה שלה.
- מצא את האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(20) נתונה הפונקציה $y = \frac{2x^2-8}{ax^2+bx-10}$. לפונקציה יש אסימפטוטה אחת בלבד המאונכת

- לציר ה- x והיא הישר $x = 5$. כמו כן ידוע שהפונקציה לא מוגדרת עבור ערך נוסף של x וערך זה הוא שלילי.
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מצא את a ו- b .
 - חקור את הפונקציה: מצא נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון, אסימפטוטות המקבילות לצירים ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(21) נתון שלפונקציה $y = \frac{x^2+a}{(x-3)^2}$ אין נקודות קיצון.

- מצא את a .
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

חקירת פונקציות רציונאליות – הבעה עם פרמטרים (חזרה)

(22) נתונה הפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2+3a^2}$, $a > 0$. ענה על הסעיפים הבאים ומצא: (היעזר ב- a במידת הצורך)

- תחום הגדרה.
- נקודות חיתוך עם הצירים.
- אסימפטוטות המאונכות לצירים.
- נקודות קיצון.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה אם $a < 0$.

(23) נתונה הפונקציה $y = \frac{x+2a}{x^2}$, $a > 0$. ענה על הסעיפים הבאים (היעזר ב- a):

- מצא את תחום ההגדרה.
 - מצא את נקודות החיתוך עם הצירים.
 - מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים.
- (המשך התרגיל בעמ' הבא)

- ד. מצא את נקודות הקיצון.
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ו. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה אם $a < 0$.

(24) נתונה הפונקציה $y = \frac{a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2}$, $a > 0$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ד. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) נתונה הפונקציה $y = \frac{x-2}{x^2-a^2}$, $a > 2$

- א. הבע באמצעות a , במידת הצורך, ומצא: תחום הגדרה, אסימפטוטות המקבילות לצירים, נקודות חיתוך עם הצירים ותחומי עלייה וירידה.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(26) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2-1}{(x-a)^2}$, $a > 1$. ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ד. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

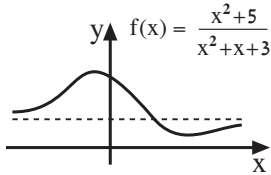
(27) נתונה הפונקציה $y = \frac{(x-1)^2}{x^2-b^2}$, $b > 1$.
א. מצא:

- (1) תחום הגדרה.
(2) אסימפטוטות המקבילות לצירים.
(3) נקודות חיתוך עם הצירים.
(4) נקודות קיצון.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

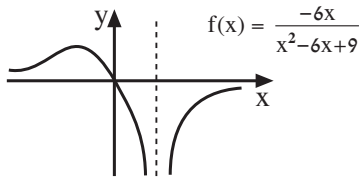
(28) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(x-3b)^2}{(x-b)^4}$, $b > 0$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ד. מצא את ערכי x שעבורם $f'(x) = 0$.
ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

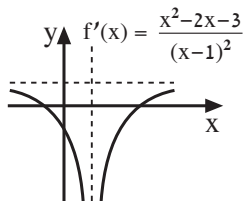
תשובות (תרגילים לחזרה – חקירת פונקציות רציונאליות):



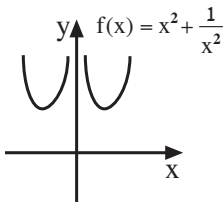
- (1) א. כל x . ב. $(0, \frac{5}{3})$. ג. $(-1, 2)$.
מקסימום, $(5, \frac{30}{33})$. ד. עולה:
 $x < -1$ או $x > 5$, יורדת: $-1 < x < 5$.
ה. $y = 1$. ו. $(2, 1)$. ח. (1) 4. (2) $\frac{7}{11}$.



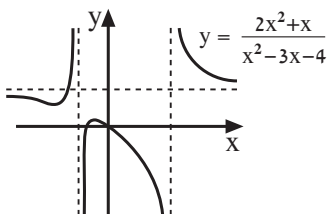
- (2) א. $x \neq 3$. ב. $(-3, \frac{1}{2})$. מקסימום.
ג. עולה: $x < -3$ או $x > 3$, יורדת:
 $-3 < x < 3$. ד. $(0, 0)$. ה. $x = 3$.
ו. $y = 0$. ז. (1) $\frac{1}{2}$. (2) שניים.



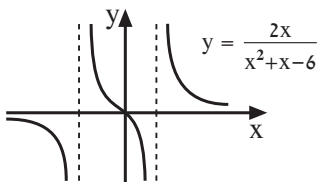
- (3) א. $x \neq 1$. ב. אין. ג. עולה: $x > 1$,
יורדת: $x < 1$. ד. $(-1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -3)$.
ה. $x = 1$, $y = 1$. ז. (1) $x = 3$ מינימום,
 $x = -1$ מקסימום. (2) עולה: $x > 3$ או
 $x < -1$, יורדת: $1 < x < 3$ או $-1 < x < 1$.



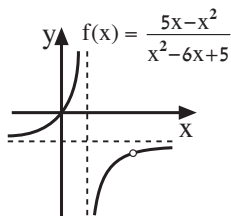
- (4) א. $x \neq 0$. ב. אין. ג. $(1, 2)$.
מינימום, $(-1, 2)$. מינימום.
ד. $x = 0$. ה. עולה: $-1 < x < 0$.
ו. $x > 1$, יורדת: $x < -1$ או
 $0 < x < 1$. ח. -2.



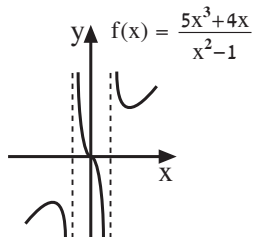
- (5) א. $x \neq -1$, $x \neq 4$. ב. $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 0)$.
ג. $x = -1$, $x = 4$. ד. $y = 2$.
מינימום, $(-\frac{2}{7}, \frac{1}{25})$. ה. עולה:
 $-2 < x < -1$ או $-1 < x < -\frac{2}{7}$, יורדת:
 $x < -2$ או $-\frac{2}{7} < x < 4$ או $x > 4$.
ז. $0 < x < 4$.



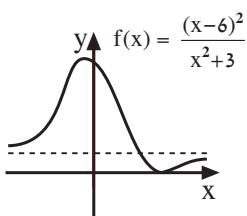
- (6) א. $x \neq 2$, $x \neq -3$. ב. אין.
ג. יורדת: $x < -3$ או $-3 < x < 2$.
ד. $x > 2$. ה. $x = 2$.
ו. $x = -3$, $y = 0$. ז. לא.



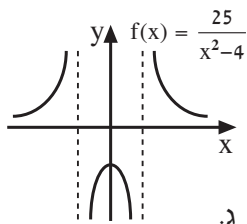
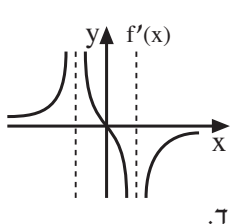
- (7) א. $x \neq 5, x \neq 1$. ב. $x = 1$, $y = -1$. ג. $(0,0)$. ד. אין.
ה. עולה: $x < 1$ או $1 < x < 5$. ו. $x > 5$. ז. $(0,0)$.



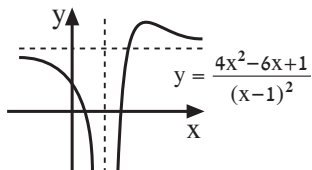
- (8) א. $x \neq -1, x \neq 1$. ב. $(0,0)$. ג. $x = 1, x = -1$. ד. $(2,16)$ מינימום, $(-2,-16)$ מקסימום. ה. עולה: $x < -2$ או $x > 2$. ו. יורדת: $-2 < x < -1$ או $-1 < x < 1$. ז. -16 .



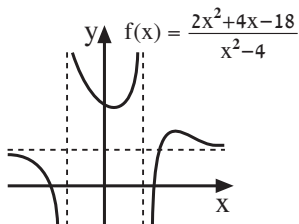
- (9) א. $a = -6$ או $a = \frac{1}{2}$. ב. $(1,12)$, $(6,0)$. ג. $(-\frac{1}{2},13)$ מקסימום, $(6,0)$ מינימום. ד. $(-\frac{1}{2},13)$ מינימום, $(6,0)$ מקסימום. ה. עולה: $x < -\frac{1}{2}$ או $x > 6$. ו. יורדת: $-\frac{1}{2} < x < 6$. ז. $y = 1$. ח. $-\frac{1}{2} < x < 6$. ט. $(-\frac{1}{2},-13)$ מינימום, $(6,0)$ מקסימום. י. עולה: $-\frac{1}{2} < x < 6$. יא. יורדת: $x < -\frac{1}{2}$ או $x > 6$. יב. $y = -1$.



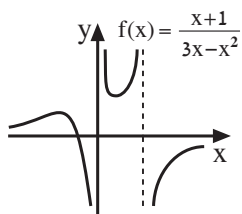
- (10) א. $a = 25$. ב. $(1, x \neq 2, x \neq -2)$. ג. $(0,-6.25)$. ד. $(0,-6.25)$ מקסימום. ה. עולה: $x < -2$ או $-2 < x < 0$. ו. יורדת: $0 < x < 2$. ז. $x > 2$. ח. $y = 0$. ט. $x = -2, x = 2$. י. $y = 0$.



- (11) א. $a = 4$. ב. $(2,5)$. ג. $(1,4)$ מקסימום, $(2,5)$ מינימום. ד. $y = 4$. ה. $x = 1$. ו. $y = 4$. ז. $x = 1$. ח. $y = 4$. ט. $x = 1$. י. $y = 4$. יא. $x = 1$. יב. $y = 4$.



- (12) א. $a = 2, b = 4$. ב. $x \neq -2, x \neq 2$. ג. $(0,4.5)$, $(-4.16,0)$, $(2.16,0)$. ד. $(1,4)$ מינימום, $(2,5)$ מקסימום. ה. עולה: $x < -2$ או $-2 < x < 2$. ו. יורדת: $2 < x < 4$. ז. $x > 4$. ח. $x > 4$. ט. $x > 4$. י. $x > 4$. יא. $x > 4$. יב. $x > 4$.



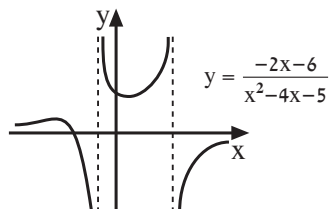
13 א. $a = 1, b = 3$; מינימום. $(1, 1)$

ב. $x = 0, y = 0$; מקסימום. $(-3, \frac{1}{9})$

ג. $(-1, 0)$; עולה: $x < -3$ או $1 < x < 3$

או $x > 3$, יורדת: $-3 < x < 0$ או $0 < x < 1$

ה. $(1, 1), (-3, \frac{1}{81}), (-1, 0)$



15 א. $a = -2, b = 5$

ב. $x \neq 5, x \neq -1$ (1)

(2) $x = -1, x = 5, y = 0$

(3) $(-3, 0), (0, \frac{6}{5}), (1, 1)$ (4)

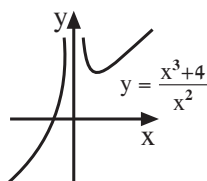
מינימום, $(-7, \frac{1}{9})$ מקסימום.

16 א. $a = -3, b = -4$. ב. $x = -2, y = -3$. ג. אין. ד. $(1, -\frac{5}{3})$ מקסימום.

ה. $(0, -2), (-\frac{1}{2}, -3)$. ו. המינימום המוחלט: -3 , המקסימום המוחלט: $-\frac{5}{3}$.

17 א. $x \neq 1, x \neq 2$. ב. $(0, 0), (3, 0)$. ג. $x = 1, x = 2, y = 1$. ד. $(1.5, 9)$ מינימום.

ו. אין.

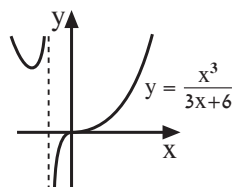


18 א. $a = 4$

ב. $(\sqrt[3]{-4}, 0), x \neq 0$

ג. $(2, 3)$ מינימום.

ד. $x = 0$

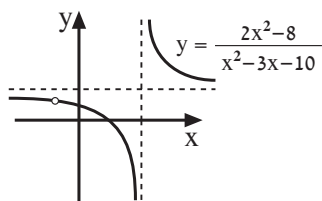


19 א. $a = 6$. ב. $x \neq -2$

ג. $(0, 0), (-3, 9)$ מינימום;

עולה: $-3 < x < -2$ או $x > -2$

יורדת: $x < -3$. ד. $x = -2$

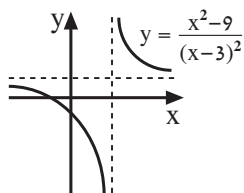


20 א. $x \neq -2, x \neq 5$

ב. $a = 1, b = -3$

ג. $(2, 0), (0, \frac{4}{5})$; אין;

$x = 5, y = 2$

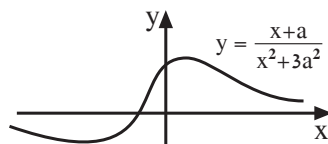


21 א. $a = -9$

ב. $(-3, 0)$, $(0, -1)$

ג. $y = 1$, $x = 3$

ד. יורדת: $x < 3$ או $x > 3$

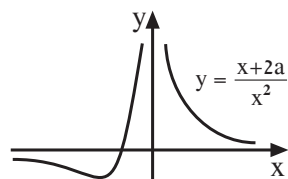


22 א. כל x . ב. $(0, \frac{1}{3a})$, $(-a, 0)$

ג. $y = 0$. ד. $(a, \frac{1}{2a})$ מקסימום,

$(a, \frac{1}{2a})$ מינימום. ו. $(-3a, -\frac{1}{6a})$

מינימום, $(-3a, -\frac{1}{6a})$ מקסימום.



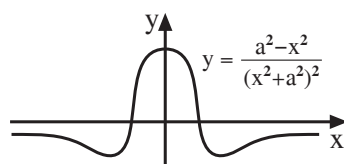
23 א. $x \neq 0$. ב. $(-2a, 0)$

ג. $y = 0$, $x = 0$

ד. $(-4a, -\frac{1}{8a})$ מינימום.

ו. עולה: $0 < x < -4a$

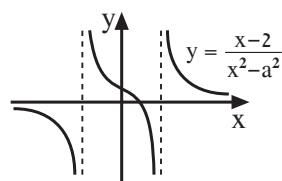
יורדת: $x < 0$ או $x > -4a$



24 א. כל x . ב. $(0, \frac{1}{a^2})$, $(a, 0)$, $(-a, 0)$

ג. $(0, \frac{1}{a^2})$ מקסימום, $(\sqrt{3}a, -\frac{1}{8a^2})$ מינימום,

$(-\sqrt{3}a, -\frac{1}{8a^2})$ מינימום. ד. $y = 0$



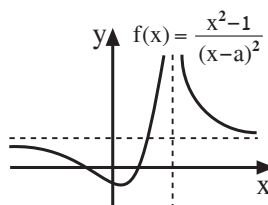
25 א. $x \neq -a$, $x \neq a$

ב. $y = 0$, $x = -a$, $x = a$

ג. $(0, \frac{2}{a^2})$, $(2, 0)$; יורדת:

$-a < x < a$ או $x < -a$

או $x > a$

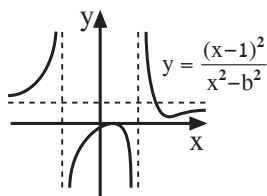


26 א. $x \neq a$. ב. $y = 1$, $x = a$

ג. $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -\frac{1}{a^2})$

ד. $(\frac{1}{a}, \frac{1}{1-a^2})$ מינימום. ה. עולה:

$\frac{1}{a} < x < a$, יורדת: $x < \frac{1}{a}$ או $x > a$

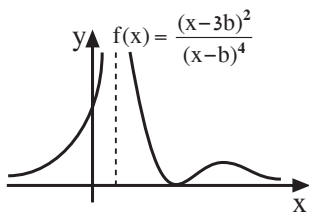


27 א. (1) $x \neq -b, x \neq b$

(2) $y = 1, x = -b, x = b$

(3) $(0, -\frac{1}{b^2}), (1, 0)$ (4) $(1, 0)$

מקסימום, $(b^2, \frac{b^2-1}{b^2})$ מינימום.



28 א. $x \neq b$ ב. $y = 0, x = b$

ג. $(0, \frac{9}{b^2}), (3b, 0)$ ד. $x = 3b$

$x = 5b$ ה. עולה: $x < b$ או

$3b < x < 5b$, יורדת:

$b < x < 3b$ או $x > 5b$